

14808

现代应用数学丛书

平面弹性论

〔日〕森口繁一 著

上海科学技术出版社

统一书号 13119·463

定价 0.50 元

現代应用数学丛书

平面彈性論

〔日〕森口繁一 著

刘 亦 珩 譯

王 开 福 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本,系统地探讨了利用复应力函数理论求平面弹性问题的一般解的方法,并收集了其他学者在这方面的成就,列出它们之间的关系,使读者有一个全面的了解。

全书计分基本方程,复应力函数一般理论,应力函数的表达式,复参数的应用,反照原理等五章,可供数学和力学工作者参考。

现代应用数学丛书

平 面 弹 性 论

原 书 名	2次 元 弹 性 论
原 著 者	〔日〕 森 口 繁 一
原出版者	岩 波 书 店
译 者	刘 亦 珩
校 者	王 开 福

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业许可证出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

商务印书馆上海厂印刷

开本850×1168 1/32 印张2 26/32 字数64,000

1962年6月第1版 1962年6月第1次印刷

印数 1~7,000

统一书号: 13119 · 464

定 价: (十四) 0.50 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共 15 卷 60 册，分成 A、B 两组，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成 42 种，不另分組編号，陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是 1957 年起以讲座形式陸續出版的，写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

序

彈性靜力學是偏微分方程邊界值問題的一種。它除了研究已知問題解的存在性及唯一性之外，在實用上更重要的是要求出解的數值。因此，對所謂“一般性解”，特別關於平面問題，很多學者發表了不少文獻。但通觀這些一般解法使我們感覺到：第一，由於符號及其表示法的不同，使得一些實質上相同的東西，從形式上看來好象有所不同，同時使一些密切相關的東西在形式上看來也好象變得相互無關。第二，在利用級數和積分形式表示問題的解時，並沒有將為什麼可以利用它們的理由和根據交代清楚。因此人們在處理新問題時仍然盲目搜索，而且還會錯誤地使用公式。

本書將論述一種復應力函數的方法，並且說明以前各種表達式與本書表達式之間的關係，又注意解的表達式與收斂區域的關係，盡量使這種表達式自然地被推导出來。應力函數的多值性通常容易使人迷惑，但本書一開始就考慮到“位錯”，並且給予一般的處理，這樣就能避免导出錯誤的結果。

在此所採用公式的形式，引自 I. S. Sokolnikoff: *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill (1956), Chap. 5 和 N. I. Muskhelishvili 等人的工作，但在本稿全部結構上，作者還作了一番推敲，特別是第 5 章反照原理的應用，乃是作者自己的工作，對於簡單的問題，單用它就可以解決；而對於複雜問題，在求解時亦相當有用。

S. M. 1956 年 12 月 3 日

現代应用数学丛书

书 名	原 作 者	譯 者	书 名	原 作 者	譯 者
代 数 学	弥永昌吉等	熊全淹	非綫性振动論	古 屋 茂	呂紹明
几 何 学*	矢野健太郎	孙澤瀛	力学系統与論	岩 四 叉 一	孙澤瀛
复 变 函 数	功力金二郎	刘书琴	平 面 彈 性 論	森 口 繁 一	刘亦珩
集 合·拓 扑·測 度*	河 田 敬 义	賴英半	有 限 变 位 彈 性 論*	山 本 善 一 夫	刘亦珩
泛 函 分 析*	吉 田 耕 作	程其襄	变 形 几 何 学*	近 藤 文 一 郎	刘亦珩
广 义 函 数*	岩 村 联	楊永芳	塑 性 論*	鷗 津 文 一 郎	刘亦珩
常 微 分 方 程	福原滿洲雄	張庆芳	粘 性 流 体 理 論	谷 一 郎	刘亦珩
偏 微 分 方 程*	南 云 道 夫	錢端壯	可 压 縮 流 体 理 論	河 村 龙 馬	刘亦珩
特 殊 函 数	小谷正雄等	錢端壯	网 絡 理 論	喜 安 善 市 等	賈弃啓
差 分 方 程	福 田 武 雄	穆鴻基	自 动 控 制 論	喜 安 善 市 等	翟立林
富里哀变换与換*	河 田 龙 夫	錢端壯	回 路 拓 扑 学	近 藤 一 夫	張鳴鏞
拉普拉斯变换*	加 藤 敏 夫	周怀生	信 息 論	喜 安 善 市 等	李文清
变分法及其应用*	岩 堀 长 庆	孙澤瀛	推 断 統 計 理 論	北 川 敏 男	李賢平
李 群 論	伊 藤 清	刘璋温	統 計 分 析*	森 口 繁 一	刘璋温
随 机 过 程*	山内恭彦等	張质賢	实 驗 設 計	增 山 元 三 郎	刘璋温
回 轉 群 与 对 称 用	伏 見 康 治	孙澤瀛	群 体 遺 傳 学 的 論	木 村 資 生	刘祖洞
結 晶 統 計 与 代 数	犬 井 鉄 郎 等	楊永芳	博 奕 論	官 澤 光 一	張毓春
偏 微 分 方 程 用 的	加 藤 敏 夫 等	王占瀛	綫 性 規 划	森 口 繁 一	刘源張
微 分 方 程 的 解 法	森 口 繁 一 等	閻昌齡	經 济 理 論 中 的 方 法	安 井 琢 磨 等	談祥柏
数 值 計 算 法	胡 永 振 一 郎	周民强	随 机 过 程 的 应 用	河 田 龙 夫	刘璋温
量 子 力 学 中 的 数 学 方 法*	近 藤 一 夫 等	刘亦珩	計 算 技 术	高 桥 秀 俊	姚 晋
工 程 力 学 系 統			穿 孔 卡 計 算 机	森 口 繁 一	刘源張

注：有 * 者已在 1961 年出版。

目 录

出版說明

序

第1章	基本方程	1
§ 1	彈性理論的平面应力問題和平面应变問題	1
§ 2	平衡方程和Airy 应力函数	4
§ 3	協調条件, 位移及旋轉	8
§ 4	复应力函数	10
§ 5	边界条件	13
§ 6	简单例題	15
第2章	复应力函数一般理論	19
§ 7	标准化与附加項	19
§ 8	多值性与合力及位錯	21
§ 9	坐标变换	25
§ 10	周期性	29
§ 11	各种表达式	30
第3章	应力函数的表达式	33
§ 12	圓板上的 Taylor 級数展开	33
§ 13	圓环上的 Laurent 級数展开	42
§ 14	圓孔及孤立奇点	48
§ 15	半无限板——第一种 Laplace 积分	53
§ 16	带状板——第二种 Laplace 积分	59
第4章	复参数的应用	65
§ 17	曲綫坐标与共形映照	65
§ 18	橢圓环	68
§ 19	双极坐标	70
§ 20	楔形域	74
第5章	反照原理	76

§ 21	用反照原理作解析开拓	76
§ 22	对于实轴的反照	77
§ 23	对于圆弧的反照	80
§ 24	椭圆孔的情形	82

第1章 基本方程

§1 弹性理論的平面应力問題和平面应变問題

各向同性彈性体的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 和应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z; \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 間存在有广义 Hooke 定律

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x - \nu \sigma_z), & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中 E 是 Young 彈性模量, ν 是 Poisson 比, G 是剪切彈性模量, 其間存在着关系式

$$E = 2G(1 + \nu), \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.2)$$

設在某点的一个主方向重合于 z 軸方向, 因而 $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. 如果再加上另外一个条件, 即可有如下两类問題:

1. 平面应力問題 当 z 方向的主应力为 0, 即 $\sigma_z = 0$ 时; 則称为平面应力問題。代入 (1.1), 得

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad (1.3)$$

这是主要的, 另外一个

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (1.4)$$

并不重要。

2. 平面应变問題 当 z 方向的主应变为 0, 即 $\varepsilon_z = 0$ 时, 則

称为平面应变問題。代入(1.1)中 ε_z 的表达式, 即得

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (1.5)$$

将此代入(1.1)中 ε_x 的表达式, 則得

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu \sigma_y - \nu^2 (\sigma_x + \sigma_y) \} = \frac{1}{E} \{ (1 - \nu^2) \sigma_x - (\nu + \nu^2) \sigma_y \} \\ &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_y \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

在此若設

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu} \left(\frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu} - 1 \right), \quad (1.7)$$

則(1.6)与(1.3)第一式的形式相同。同理 ε_y 也变成与(1.3)第二式的形式相同。最后得

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E'} (\sigma_y - \nu' \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. \quad (1.8)$$

在此若注意到

$$\frac{E'}{2(1 + \nu')} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\nu}{1 - \nu} \right)} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad (1.9)$$

則易知(1.8)和(1.3)的性质是完全相同的。

以上仅就一点論述了平面应力問題和平面应变問題, 下面进一步来考虑在所有点都具有这种性质的情形。例如对柱体取母綫方向为 z 軸, 同时具有如下的边界条件: 第一, 柱体側面上的边界条件沿长度方向不变; 第二, 在其两端面上作用着按(1.5)給定的面力, 則其所有点的应变可近似的看作平面 (x, y) 上点的平面应变状态。(若柱体很长时, 即使第二条件不能成立, 但除端面附近以外, 仍然近似地具有平面应变状态。)对于管状柱体也具有同样的性质。

又如把薄板厚度的方向取作 z 軸, 現在研究它所有的点都在平行于 (x, y) 平面上发生平面应力状态的情形。自然, 为了这样

必須選擇特別的邊界條件^①。但是，在實際問題中一般不能出現這樣的邊界條件，只有板本身很薄，且在面內受有載荷時，才能近似地實現這種狀態。

當彈性體的所有點都處於平面應變或平面應力狀態時，則其應變分量和應力分量可看成僅含 (x, y) 的函數。現以 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 作為應力分量，而以 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 作為應變分量。應力和應變間的關係式是 (1.3) 或 (1.8)。平面彈性理論就專門處理這樣的問題。(1.8) 與 (1.3) 形狀相同，所以今後將專就平面應力問題導出公式，而對於平面應變問題的討論，只須將 E 及 ν 分別以 E' 及 ν' 代之就可以了（參照 (1.7)）。並且在引用其他文獻的公式時，也都是將平面應變問題的公式改寫成平面應力問題的公式（今後將不再一一說明）。

[注 1] 對於在長柱體中部具有平面應變狀態，或在薄板上具有平面應力狀態等等，都是近似的說法。關於這方面的精辟討論直到目前還未見到有人作過。“廣義平面應力”這個概念也可理解為薄板的近似情形。Pilton [Phil. Trans. Roy. Soc., A201 (1903), 67] 所舉的例，其實也不過是普通平面應力問題，只是論述奇妙些而已。Southwell [Phil. Mag. 21 (1936), 201] 的討論比較深入，但是對於漸近應力狀態，似乎沒有得到這樣的結論：即它不是平面應力，而可作為廣義平面應力來考慮。

[注 2] 有時將平面應變問題廣義地解釋為滿足條件 $\varepsilon_z = c$ (c 是常數但不必為 0) 的問題，但這可看作上述平面應變問題 ($\varepsilon_z = 0$) 再重迭上沿 z 方向的一個均勻伸縮 ($\varepsilon_z = c$)。

[注 3] 關於一點的平面應變問題或平面應力問題的定義，可參看 Love: Math. Theory of Elasticity 4th ed. (1927), p. 45, 82.

[注 4] 有時用 Poisson 數 $m = 1/\nu$ 代替 Poisson 比。這樣，將平面應變問題的公式寫成平面應力問題的形狀時，其 Poisson 數 $m' = 1/\nu'$ 等於 $m - 1$ ，這是便於記憶的。

① 如在薄板的上下兩面不受外力，而只在側面上受有沿板厚度方向均勻的與上下兩面平行的力作用。——校者注

Lamé 常数 λ , μ 和 E , ν 或 G , m 間有如下的关系:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G}{m-2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G; \quad (1.10)$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \frac{1}{m}, \quad G = \mu. \quad (1.11)$$

对于鉄, $E = 2 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, 鋁 $E = 7 \times 10^3 \text{ kg/mm}^2$. 至于 ν 通常近似的取作 0.3.

[注5] 等价 Young 模量 $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ 在板弯曲及曲屈問題內时常遇到。为了不允許橫向变形, 因此从外表上来分析, 等价 Young 彈性模量, 必須有較大的量。

§ 2 平衡方程和 Airy 应力函数

彈性体的应力与体积力的平衡方程, 一般写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 X, Y, Z 是单位体积力的分量。在平面問題里, 与 z 有关的項都消失, 而变成

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (2.2)$$

(2.1) 的第三式沒有意义)。若不考虑体积力, 則有

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (2.3)$$

这两个式子以后作为“平衡方程”, 將經常引用。

由于(2.3)的第一式是 $\sigma_x dy - \tau_{xy} dx$ 成为完全微分的充要条件, 即有

$$\phi(x, y) = \int_A^P (\sigma_x dy - \tau_{xy} dx) \quad (2.4)$$

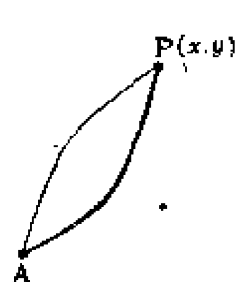


图 2.1

若始点 A 固定, 终点 P 坐标为 (x, y) , 则 $\phi(x, y)$ 的值与由 A 到 P 的路径无关, 并恒可唯一决定, 于是有

$$\sigma_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2.5)$$

现在考虑线积分 (2.4) 的物理意义。任取一条从 A 到 P 的路径, 并设对于它的微小部分 (长度为 ds) 从路径右侧施于左侧的力的 x 分量为 $p_x ds$ ① (以后对于 z 方向恒假定具有单位厚度)。由图 2.2 知

$$p_x ds = \sigma_x dy - \tau_{xy} dx, \quad (2.6)$$

所以 (2.4) 可写成

$$\phi(x, y) = \int_A^P p_x ds, \quad (2.7)$$

即 $\phi(x, y)$ 等于“由 A 到 P 的任意路径, 从右侧施于左侧各力的合力的 x 分量”。

此值与自 A 到 P 的路径选择无关。事实

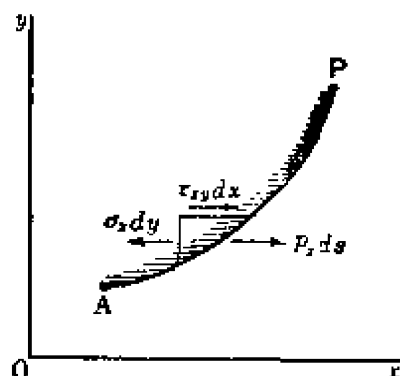


图 2.2

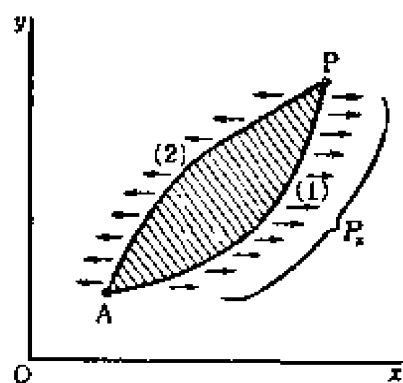


图 2.3

上, 可按图 2.3 作出两路径所包围的部分而考虑之即可理解 (因为对于路径 (1) 从右侧施于左侧的力, 与对于路径 (2) 从左侧施于右侧的力必然是平衡的)。

为了将上述物理意义联系起来, 我们将 $\phi(x, y)$ 写成 P_x , 即

$$P_x = \int_A^P (\sigma_x dy - \tau_{xy} dx). \quad (2.8)$$

同理, 线积分

$$P_y = \int_A^P (\tau_{xy} dy - \sigma_y dx) \quad (2.9)$$

① 这一句如改述如下, 似乎更清楚些: “如假定从 A 向 P 的方向为正方向, 然后取向着正方向前进的观察者的右侧为路径 AP 的正法线方向, 而假定从路径 AP 的法线正侧作用于其元素 ds 上的 x 分量为 $P_x ds$.” (下同) ——校者注

的物理意义也与路线选取无关。因此与(2.5)等价的公式为

$$\sigma_x = \frac{\partial P_x}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial P_y}{\partial y}, \quad \sigma_y = -\frac{\partial P_y}{\partial x}. \quad (2.10)$$

在此对应于同一个 τ_{xy} 的两个导数必须相等, 因此有

$$-\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} = 0. \quad (2.11)$$

由于该式是 $P_x dy - P_y dx$ 成为完全微分的充要条件, 所以线积分

$$F(x, y) = \int_A^P (P_x dy - P_y dx) \quad (2.12)$$

的值与从 A 到 P 的路线选取无关, 因此得到

$$P_x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad P_y = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (2.13)$$

将此式代入(2.10)即得

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (2.14)$$

通常对于应力分量具有上述关系的函数 $F(x, y)$, 我们称为 **Airy 应力函数**。在研究它的一般理论之前, 我们先讨论(2.12)所定义的 F 的物理意义。为了与路线上任意点的坐标 (x, y) 区别起见, 我们取终点 P 的坐标为 (x_P, y_P) , 将(2.12)作分部积分, 即得

$$\begin{aligned} F(x_P, y_P) &= \int_A^P (P_x dy - P_y dx) = \left[y P_x - x P_y \right]_A^P - \int_A^P (y dP_x - x dP_y) \\ &= y_P P_x(x_P, y_P) - x_P P_y(x_P, y_P) + \int_A^P (x dP_y - y dP_x) \\ &= \int_A^P \{ (y_P - y) dP_x - (x_P - x) dP_y \} \end{aligned} \quad (2.15)$$

(在 A 点 P_x 及 P_y 都是 0——参照(2.8), (2.9))。最后的积分, 表示由路线右侧施于左侧的力, 关于 P 点的力矩。所以(2.12)所定义的函数 $F(x, y)$ 具有这样的意义: 对于由 A 到 P 的任意路线,

从右侧施于左侧的力关于 P 点的力矩。此积分之所以与路线无关，也可由此物理意义给予解释。

通常与应力分量具有 (2.14) 那样关系的函数 $F(x, y)$ 叫做 Airy 应力函数。由上面关于终点合力矩所定义的 F 是 Airy 应力函数的一种，称为“以 A 为基准点的标准 Airy 应力函数”。若将它表为 $F_A(x, y)$ ，则对于同一应力状态的 Airy 应力函数的一般表达式为

$$F(x, y) = F_A(x, y) + Ax + By + C, \quad (2.16)$$

此处 A, B, C 都是任意常数。

证明：若求 (2.16) 的二阶导数，则附加项消失。反之，若某一函数所有的二阶导数为 0，则函数只能具有 $Ax + By + C$ 的形式。

对于一般 Airy 应力函数，虽然不能象上述标准 Airy 应力函数那样具有明确的物理意义，但它们确具有如下的性质，即

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_A^B, \quad \left[-\frac{\partial F}{\partial x} \right]_A^B, \quad \left[F - x \frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial F}{\partial y} \right]_A^B \quad (2.17)$$

分别等于对 A 到 B 的任意路线，从右侧施于左侧的合力的 x 分量， y 分量，以及合力关于原点的合力矩。

证明

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_A^B = \int_A^B \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx \right) = \int_A^B (\sigma_x dy - \tau_{xy} dx) = \int_A^B p_y ds,$$

$$\text{同理, } \left[-\frac{\partial F}{\partial x} \right]_A^B = \int_A^B p_x ds,$$

$$\begin{aligned} \left[F - x \frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial F}{\partial y} \right]_A^B &= \int_A^B \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(F - x \frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(F - x \frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx \right\} \\ &= \int_A^B \left\{ -x \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx \right) - y \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx \right) \right\} \end{aligned}$$

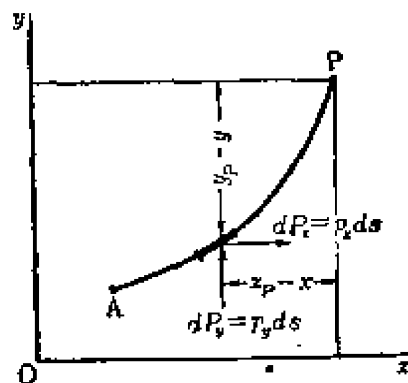


图 2.4

$$\begin{aligned}
&= \int_A^B \left\{ x(\tau_{xy}dy - \sigma_x dx) - y(\sigma_y dy - \tau_{xy}dx) \right\} \\
&= \int_A^B (xp_y - yp_x) ds.
\end{aligned}$$

§3 協調条件, 位移及旋轉

現在討論加上載荷以前, 体内到处无应力的情形^① [注 1], 并設由載荷引起的位移是微小的。令 (u, v, w) 代表位移的分量, 因而一般应变的分量有如下关系:

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

旋轉的分量如下:

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tilde{\omega}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
\tilde{\omega}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).
\end{aligned} \quad (3.2)$$

在平面問題中, 仅有位移分量 u 及 v , 应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, 以及旋轉分量 $\tilde{\omega}_{xy}$ 是主要的量 (又由于在平面問題中, 可以把 $\tilde{\omega}_{xy}$ 看成标量, 所以以后簡單的記作 $\tilde{\omega}$)。它們之間的关系, 由上式得知为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (3.3)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.4)$$

將它們結合起来, 就得到

① 即无預应力的情形。——校者注

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} + \tilde{\omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} - \tilde{\omega}, \quad (3.5)$$

在平面問題中仅有一个“不協調度”分量[注 2]

$$R_z = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.6)$$

是重要的。將(3.3)代入(3.6)內, 則得

$$R_z = 0. \quad (3.7)$$

由于最初假設了問題是处于无应力状态, 从而导出不協調度为零。故称(3.7)为这种情形的協調条件。

將(1.3)代入(3.6), 則有

$$R_z = \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) - \frac{1}{G} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \tau_{xy}. \quad (3.8)$$

將(1.2)第二式的 G 和(2.14)的应力分量代入(3.8), 則有

$$\begin{aligned} R_z &= \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \\ &\quad - \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

若(3.7)成立, 則有

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \quad (3.10)$$

这表示 Airy 应力函数 $F(x, y)$ 是重調和函数。

[注 1] 实际上无应力的弹性体是几乎不存在的。关于具有“固有应力”^①的弹性体, 上面对位移及旋轉的討論在此就不适合了。同时在此不協調度也不为零。(参照森口: “彈性体のクイテガイの基本理論”, 应用数学力学, 1 卷 1 号 (1947 年 6 月), 29~36 頁。)

[注 2] 不協調度的分量是

① 即具有預应力。——校者注

$$\left. \begin{aligned}
 R_x &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\
 U_x &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\
 R_y &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \\
 U_y &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\
 R_z &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
 U_z &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

至于(3.1)所表示的应变,它们都为零。通常将这六个式子设为零而得的六个方程称为“协调条件”。(参照森口前著(見注1))

[注3] 无固有应力时,不协调度必为零;但不协调度为零时,却不一定无固有应力(参照§8)。

§4 复应力函数

在一般情形,重调和函数 $F(x, y)$ 可表示为

$$F(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)], \quad (4.1)$$

在此 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 都是 z 的解析函数[注1]。由于 Airy 应力函数是重调和函数(§3), 因此也应该表示为(4.1)的形状,这时的 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 就叫作“复应力函数”。

当已知应力状态时,除去一定形式的附加项(§7)外,可以唯一决定相应的复应力函数;为了讨论的方便,我们将用如下的式子[注2]来定义它:

$$\varphi(z) = \frac{E}{4}(u + iv) + \frac{1+\nu}{4}(-P_y + iP_x), \quad (4.2)$$

$$\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z) = -\frac{E}{4}(u - iv) + \frac{3-\nu}{4}(-P_y - iP_x). \quad (4.3)$$

在此, P_x 及 P_y 表示对于自基准 A 到终点 $P(x, y)$ 的任意路线,从

右側到左側的力的合力的 x 分量及 y 分量, u, v 表示位移分量, E 是 Young 模量, ν 是 Poisson 比(在“平面应变問題”中, 将 E, ν 分別代以 E', ν' (§1))。

下面將証明由 (4.2) 及 (4.3) 所定义的函数 $\varphi(z), \psi(z)$ 是解析函数。将变数 x, y 用 z, \bar{z} 代換, 則 u, v, P_x, P_y 就变成了变数 z 及 \bar{z} 的函数[注 3]。此时討論如下微分:

$$\begin{aligned} d(u+iv) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ &= \left[\varepsilon_x + i \left(-\frac{\gamma_{xy}}{2} + \tilde{\omega} \right) \right] dx + \left[\left(-\frac{\gamma_{xy}}{2} - \tilde{\omega} \right) + i \varepsilon_y \right] dy \\ &= \left[\frac{\sigma_x - \nu \sigma_y}{E} + i \left(-\frac{\tau_{xy}}{2G} + \tilde{\omega} \right) \right] \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ &\quad + \left[\left(-\frac{\tau_{xy}}{2G} - \tilde{\omega} \right) + i \frac{\sigma_y - \nu \sigma_x}{E} \right] \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ &= \left[\frac{1-\nu}{2E} (\sigma_x + \sigma_y) + i \tilde{\omega} \right] dz + \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_x - \sigma_y + i 2\tau_{xy}) d\bar{z} \quad (4.4) \end{aligned}$$

(在此已用过(3.5), (1.3)). 又

$$\begin{aligned} d(-P_y + iP_x) &= -(\tau_{xy} dy - \sigma_y dx) + i(\sigma_x dy - \tau_{xy} dx) \\ &= (\sigma_y - i\tau_{xy}) dx + (-\tau_{xy} + i\sigma_x) dy \\ &= (\sigma_y - i\tau_{xy}) \frac{dz + d\bar{z}}{2} + (-\tau_{xy} + i\sigma_x) \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} dz + \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} - i\tau_{xy} \right) d\bar{z} \quad (4.5) \end{aligned}$$

(已用过(2.8), (2.9)). 同理, 以上两式的共轭式, 可得如下两式:

$$d(u-iv) = \left[\frac{1-\nu}{2E} (\sigma_x + \sigma_y) - i \tilde{\omega} \right] d\bar{z} + \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_y - \sigma_x - i 2\tau_{xy}) dz, \quad (4.6)$$

$$d(-P_y - iP_x) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} d\bar{z} + \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy} \right) dz. \quad (4.7)$$

于是由这些結果就可得(4.2), (4.3)右边的微分, 即

$$d \left[\frac{E}{4} (u+iv) + \frac{1+\nu}{4} (-P_y + iP_x) \right] = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} + i \frac{E}{4} \tilde{\omega} \right) dz + 0 \cdot d\bar{z}, \quad (4.8)$$

$$d\left[-\frac{E}{4}(u-iv) + \frac{3-\nu}{4}(-P_y - iP_x)\right] \\ = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} + i\frac{E}{4}\tilde{\omega}\right)d\bar{z} + \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy}\right)dz. \quad (4.9)$$

由(4.8)首先得知(4.2)右边对 \bar{z} 的导数为零,即(4.2)的右边与 \bar{z} 无关,且仅为 z 的函数。因此可取为 $\varphi(z)$, 于是其导数 $\varphi'(z)$ 应该等于(4.8)右边 dz 的系数。但是(4.9)右边 $d\bar{z}$ 的系数和它完全一样。所以(4.3)的右边应该是 $\bar{z}\varphi'(z) +$ (仅为 z 的函数)。因此,将它写成(4.3)左边的形状,则 $\psi'(z)$ 仅为 z 的函数。以 $\psi'(z)$ 为导数的函数 $\psi(z)$ 也是 z 的解析函数。

由以上证明,得关系式如下:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y) + i\frac{1}{4}E\tilde{\omega}, \quad (4.10)$$

$$\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) + i\tau_{xy}. \quad (4.11)$$

由此两式就得到用复应力函数表示应力分量的公式,即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}[\varphi'(z)] - \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)], \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}[\varphi'(z)] + \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)], \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

再由(4.2), (4.3)消去 P_x 及 P_y , 得

$$u - iv = \frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\overline{\varphi(z)} - \{\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)\}\right]. \quad (4.13)$$

与此相反,若消去 u 及 v , 则得

$$-P_y - iP_x = \overline{\varphi(z)} + \{\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)\}. \quad (4.14)$$

这些公式今后将时常引用[注4].

最后用(4.2), (4.3)所定义的 $\varphi(z)$, $\psi(z)$, 作成(4.1)的右边时,我们将证明它是 Airy 应力函数。先把它记作 $\chi(z, \bar{z})$:

$$2\chi(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi(z) + \psi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (4.15)$$

取其微分并利用(4.14), 则得

$$\begin{aligned}
 2d\chi &= [\bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)]dz + [\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})]d\bar{z} \\
 &= (-P_y - iP_x)(dx + idy) + (-P_y + iP_x)(dx - idy) \\
 &= 2(-P_y dx + P_x dy).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

所以

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -P_y, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = P_x. \tag{4.17}$$

在此, 利用(2.10), 就得到

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}. \tag{4.18}$$

这表明 χ 是一个 Airy 应力函数(参照(2.14))。

[注1] 公式(4.1)最初是 E. Goursat[Bull. de la Soc. Math. de France (1898), 236~237] 所提出的。

[注2] 在此除了推导方法有些麻烦以外, 利用这个定义将对第2章的讨论比较方便。

[注3] u, v, P_x, P_y 是两变量 x, y 的解析函数, 当 x, y 都是实数且点 (x, y) 落在弹性体实际所占的区域中时, 函数的值将直接给出它们所代表的物理量。由于它们对任意的点都是正则的, 因此可扩展(解析开拓)到 x, y 是复变数的情形, 这样, 再作变换 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, 就可把 z 与 \bar{z} 看作独立变量(不过, z 与 \bar{z} 一般已不是共轭的了)。在这种意义下, 我们称 (z, \bar{z}) 的函数(一般取复数值)为多复变函数(polygenic function)。在特殊的情形, 若函数与 \bar{z} 无关而仅为 z 的函数, 则称之为单复变函数(monogenic function), 这时恰好就是普通所指的 z 的解析函数。

[注4] N. Muschelišvili [ZAMM, 13, (1933), 264], G. Kolossoff [ZMP, 62 (1914), 386] 等也曾导出和(4.13), (4.14)内容相同的公式, 但推导方法稍有不同。

§5 边界条件

作为弹性问题的边界条件, 可考虑这样情况, 例如, 第一, 已知边界上作用的外力, 第二, 已知边界上的位移。

Airy 应力函数的解法专用在第一种情形。此时, 令作用在边

界单位长度上的外力为 (p_x, p_y) ，将边界取作 §2 中的路线，那末显然有

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = p_x, \quad -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = p_y, \quad (5.1)$$

在此 s 表示边界曲线的弧长。再将它们沿边界作积分，可得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = A - \int_0^s p_y ds, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = B + \int_0^s p_x ds, \quad (5.2)$$

这样便确定了边界上 F 的梯度(积分常数 A, B 可以是任意的)。因此切线方向的梯度 $\partial F / \partial s$ 及法线方向的梯度 $\partial F / \partial n$ 也就随着确定了。再用在边界上所确定的 $\partial F / \partial s$ 就能确定 F 在边界上的值(除去一个积分常数外)。所以此时可看作在边界上已知 F 及 $\partial F / \partial n$ [注 1]。

特别，在边界上不受外力时，由 (5.2) 则有

$$\frac{\partial F}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = B \quad (A, B \text{ 是常数}) \quad (5.3)$$

于是

$$F = Ax + By + C, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = A \frac{\partial x}{\partial n} + B \frac{\partial y}{\partial n}. \quad (A, B, C \text{ 是常数}) \quad (5.4)$$

当边界是一条连续闭曲线时，可将 (5.2) 及 (5.3) 里的 A, B 取为零。这相当于在边界上适当选取“基准点 A ” (§2)。当边界由两条以上连续曲线所组成时，允许对其中任一条作同样处理，但对其余各条边界就不能任意选取 A, B 。它们仅当问题已经解决后才可以定下来 ($\partial F / \partial x$ 及 $\partial F / \partial y$ 的力学意义参照 (2.13))。

当已知的是位移的边界条件时，要用 Airy 应力函数表示出这个条件比较繁难。

在用复应力函数表示边界条件时，只要利用 (4.13), (4.14) 就行了。即当已知在边界上的外力时就用 (4.14)，已知边界上的位

移时就用(4.13)。将(4.13)和(4.14)组合起来,可定出在边界上位移与外力的这一关系式[注2]。

[注1] 最初将边界条件写成这样形式的,据说是 J. H. Micell [参照 Bracas (见本书 §11, (2)) 70 页; Handbuch der Physik, Bd. 6, S. 202]。

[注2] (4.13)与(4.14)很类似。即当 $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ 时,则

$$\kappa \overline{\varphi(z)} - \{z\varphi'(z) + \psi'(z)\} \quad (5.5)$$

等于 $2G(u-iv)$, 若 $\kappa = -1$, 则它等于 $P_y + iP_x$ 。这说明了对于这两种边界条件的問題,其求解方法从数学的观点来看是一致的。

§6 简单例题

以上仅討論了一般的理論,本节將給出一些复应力函数的具体形式,并从而討論它們所表示的应力状态。

例1 取复应力函数为

$$\varphi(z) = Az, \quad \psi(z) = Bz^2, \quad (6.1)$$

其中 A, B 都是复常数。將它們代入(4.10), (4.11)得

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} + i \frac{E}{4} \tilde{\omega}, \quad (6.2)$$

$$2B = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i \tau_{xy}. \quad (6.3)$$

以后将复常数 C 的实部写成 C' , 虚部写成 C'' , 则

$$A' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4}, \quad A'' = \frac{E}{4} \tilde{\omega}; \quad (6.4)$$

$$B' = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{4}, \quad B'' = \frac{\tau_{xy}}{2}. \quad (6.5)$$

故应力分量处处等于下列的常数:

$$\sigma_x = 2(A' - B'), \quad \sigma_y = 2(A' + B'), \quad \tau_{xy} = 2B''. \quad (6.6)$$

这样,复应力函数(6.1)表示均匀应力状态。此时由(4.13)可知位移分量为

$$\begin{aligned}
u + iv &= \frac{1}{2G} \left[\frac{3-\nu}{1-\nu} \bar{A} \bar{z} - \{ \bar{z} A + 2Bz \} \right] \\
&= \frac{1}{2G} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} (A' - iA') (x - iy) \right. \\
&\quad \left. - (A' + iA') (x + iy) - 2(B' + iB') (x + iy) \right] \\
&= \frac{1}{2G} \left[\left(\frac{2-2\nu}{1+\nu} A' - \frac{4}{1+\nu} iA' \right) (x - iy) \right. \\
&\quad \left. - 2(B' + iB') (x + iy) \right] \\
&= \frac{1}{E} \left[\{ 2(1-\nu) A' - 4iA' \} (x - iy) \right. \\
&\quad \left. - 2(1+\nu) (B' + iB') (x + iy) \right], \tag{6.7}
\end{aligned}$$

即

$$\left. \begin{aligned}
u &= \frac{1}{E} [2(1-\nu) A' x - 4A' y - 2(1+\nu) B' x + 2(1+\nu) B' y], \\
v &= \frac{1}{E} [2(1-\nu) A' y + 4A' x + 2(1+\nu) B' y + 2(1+\nu) B' x].
\end{aligned} \right\} \tag{6.8}$$

此外,由(4.1)可求出 Airy 应力函数,得

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \text{Re}[\bar{z} A z + B z^2] \\
&= A'(x^2 + y^2) + B'(x^2 - y^2) - 2B'xy \\
&= (A' + B')x^2 + (A' - B')y^2 - 2B'xy. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

利用上式及(2.14)也可导出(6.6)。通常,当 Airy 应力函数为自变量的二次形时,它表示均匀应力状态。

例2 取复应力函数为

$$\varphi(z) = Cz^2, \quad \psi(z) = \frac{1}{3}Cz^3, \tag{6.10}$$

其中 C 为实常数。这时有

$$\varphi'(z) = 2Cz, \quad \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) = 2C\bar{z} + 2Cz = 4Cx, \tag{6.11}$$

将其代入(4.12)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2(2Cx) - 4Cx = 0, \\ \sigma_y &= 2(2Cx) + 4Cx = 8Cx, \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

在此仅有应力分量 σ_y 不为零, 而 σ_y 的大小和 x 成比例。例如受有图 6.1 那样弯曲载荷的长方板就是这样的应力状态。在此情形, 弯矩为

$$M = \int_{-a}^a x 8Cx \, dx = \frac{16}{3} Ca^3. \quad (6.13)$$

再由 (4.1) 求 Airy 应力函数, 得到

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \operatorname{Re} \left[zCz^2 + \frac{1}{3} Cz^3 \right] \\ &= C \operatorname{Re} \left[(x^2 + y^2)(x + iy) + \frac{1}{3}(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) \right] \\ &= C \left\{ (x^2 + y^2)x + \frac{1}{3}(x^3 - 3xy^2) \right\} \\ &= \frac{4}{3} Cx^3. \end{aligned} \quad (6.14)$$

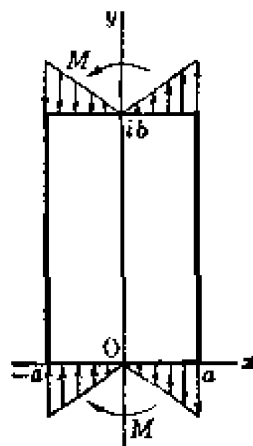


图 6.1

例 3 取复应力函数为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -2ik(z^3 - 3az^2), \\ \psi(z) &= -ik(z^4 - 2az^3 + 12b^2z^2), \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

其中 a, b, k 为实常数。为了讨论它们所表示的应力状态, 将它们代入 (4.10) 及 (4.11), 即得

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} + i \frac{F}{4} \bar{\omega} &= \varphi'(z) = 6ik(z^2 - 2az) \\ &= 12k(a-x)y + i6k(x^2 - y^2 - 2ax), \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy} &= \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \\ &= -12k(a-x)y + i24k(y^2 - b^2). \end{aligned} \quad (6.17)$$

由此可知

$$\sigma_x = 48k(a-x)y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 24k(y^2 - b^2), \quad (6.18)$$

在 $x=a$, 有 $\sigma_x=0$; 在 $y=\pm b$, 有 $\tau_{xy}=0$ 。例如图 6.2 那样的长方板在右端受有按照 $\tau_{xy} = -24k(b^2 - y^2)$ 分布的剪切载荷, 且上下边都是自由的, 而左端为适当的支持的情形, 就可看作是这样的应力状态。此时的剪切载荷的合力(剪切力)为

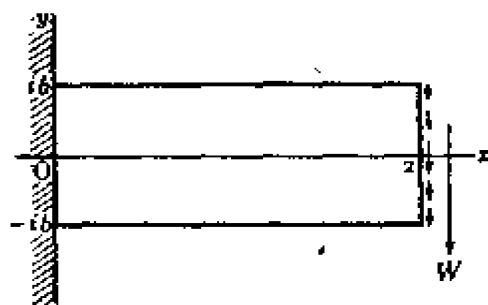


图 6.2

$$W = \int_{-b}^b 24k(b^2 - y^2) dy = \left[24k \left(b^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \right]_{-b}^b = 32kb^3. \quad (6.19)$$

第2章 复应力函数一般理論

§7 标准化与附加項

在复应力函数的定义式(4.2)及(4.3)中,包含着位移 u, v 及合力 P_x, P_y 。首先假設位移已經确定,又合力 P_x, P_y 随着基准点 A 的指定而决定,于是再利用(4.2)和(4.3)也就确定了 $\varphi(z)$ 和 $\psi'(z)$ 。为了使从(4.1)导出的 $F(x, y)$ 和标准的(2.12)式一致,只要适当选定由 $\psi'(z)$ 求 $\psi(z)$ 时所引进的积分常数就可以了(其虚部与 $F(x, y)$ 无关,可任意选取)。这样就得到了与“以 A 为基准点的标准 Airy 应力函数”相应的“标准复应力函数”。

若有这样的問題,按照它們的要求,仅需求出应力分布,而对位移与旋轉不考虑的話,則可采取一种把問題标准化的方法,就是在不影响(4.12)的情形下,尽量把公式簡化。这时,由于 $\operatorname{Re}[\varphi'(z)]$ 仅由应力所决定(参看(4.10)),所以它是唯一确定的。又因为 $\varphi''(z)$ 的实部与虚部可以用 $\operatorname{Re}[\varphi'(z)]$ 的导数来表达[注1],所以它也是唯一确定的。再根据(4.11)可知 $\psi''(z)$ 也是唯一确定的。这样,我們只允許对 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 加上一些使上面三者都不变的項,从而它們非取下列形状不可:

$$\varphi_0(z) = iC_0z + \alpha_0, \quad \psi_0(z) = \beta_0z + \gamma_0, \quad (7.1)$$

其中 C_0 是实数, $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ 一般是复数。

反之,若任意选取这些常数,作成(7.1)中的函数,再分別附加在 $\varphi(z), \psi(z)$ 上,則对应应力分量(4.12)不产生影响。因此适当选取附加項可以使問題簡化。这种作法,在实际計算上頗为有用。

(7.1)是不影响应力分量的項,这就是說“对应于一个应力状

态的复应力函数含有七个未定实常数”。其中三个可以利用 Airy 应力函数的标准化来决定, 已如前述。另外三个可利用位移和旋轉的約束条件来决定。最后还剩下一个未确定^①。

首先說明附加項 (7.1) 对 Airy 应力函数, 位移和旋轉的影响, 为此討論 (4.1) 及 (4.13) 的附加項, 得

$$\begin{aligned} F_0 &= \operatorname{Re}[\bar{z}(iC_0z + \alpha_0) + (\beta_0\bar{z} + \gamma_0)] \\ &= (\alpha'_0 + \beta'_0)x + (\alpha'_0 - \beta'_0)y + \gamma'_0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$u_0 - iv_0 = \frac{1}{2G} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} (-iC_0\bar{z} + \bar{\alpha}_0) - \{\bar{z}(iC_0) + \beta_0\} \right]. \quad (7.3)$$

由此可知在位移中出現的附加項为

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -\frac{4}{E}C_0y + \frac{3-\nu}{E}\alpha'_0 - \frac{1+\nu}{E}\beta'_0, \\ v_0 &= +\frac{4}{E}C_0x + \frac{3-\nu}{E}\alpha'_0 + \frac{1+\nu}{E}\beta'_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

再利用 (4.10) 可求得在旋轉中出現的附加項是

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{4}{E} \operatorname{Im}[iC_0] = \frac{4}{E} C_0, \quad (7.5)$$

在此, 复常数右肩上附有 \cdot 及 $\bar{\cdot}$ 分別表示它的实部及虚部 (这种記号在 § 6 里用过, 今后还将时常使用)。

[注 1] 通常将 $z=x+iy$ 的解析函数 $f(z)$ 的实部及虚部各看作是 x, y 的函数, 而写成 $f(z)=R(x, y)+iS(x, y)$, 其导数記作 $f'(z)=T(x, y)+iU(x, y)$, 它的实部及虚部可由 R 和 S 通过 $T=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial y}$, $U=\frac{\partial S}{\partial x}=-\frac{\partial R}{\partial y}$ 导出。因此說明了仅由 R 就可导出 T 及 U 。这在我們的討論中是很重要的。

[注 2] Muschelišvili 的論文 (§ 4 注 4) 中虽有类似于这里的討論, 但他沒有考虑到 Airy 应力函数的标准化, 这是不够完美之处。若將他的記号和我們的記号作比較, 則有 (左边是 Muschelišvili 的):

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \varphi(z), \quad \psi_2(z) = \psi(z), \quad \psi_1(z) = \psi'(z), \\ \Phi(z) &= \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi''(z). \end{aligned} \quad (7.6)$$

① 由于它的存在与否对全部問題不生影响, 因此通常取它为零。——校者注

[注 3] 为了得到一般性的讨论,可这样地进行标准化,即在基准点 A 处指定 $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\text{Im}[\varphi'(z)]$, $\psi'(z)$ 的值,这样有许多的便利。

§ 8 多值性与合力及位错

给出一个应力状态时,与它对应的复应力函数虽有很多,但都可按上节所说加以标准化,这便是在某基准点 A 处确定 $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\text{Im}[\varphi'(z)]$, $\psi'(z)$ 的值。但当弹性体的区域 (D) 是多连通区域(除了象外力的着力点那样的奇点)时,即使作了上述标准化,也要发生多值性的问题。

在多连通区域 (D) 内加一割线,使它变成单连通区域,则 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 就变成在其上定义的函数,但在割线两侧 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 可能是不连续的。对在 A 点标准化了的 $\varphi(z)$, $\psi(z)$, 由点 A 出发,沿着任意曲线作解析开拓,则它们或者变为单值解析函数,或者变为多值函数,不能一概而论。若函数为多值函数,则在 (D) 内加一割线后虽可强制地使它变成单值函数,但在割线的两侧函数值必然不一致,这正是应力函数在区域 (D) 中不连续的原因,故不连续性可以理解成解析函数的多值性。

若区域 (D) 是多连通的,则在 (D) 内存在着不同伦 (homotop) 于 0 的围道(将该围道连续变形收缩时,最后必逸出区域 (D) 外)。取其一为 Γ 。下面来考虑 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 从 Γ 上一点 A 沿 Γ 绕行一周再回到 A 时的变化(图 8.1)。此时终点与始点相重,但为了叙述方便起见,用 A' 表示终点以区别于始点。于是将沿 Γ 从 A 到 A' 环行一周后, $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的值分别变为 $[\varphi(z)]_{\pm 1}$ 及 $[\psi(z)]_{\pm 1}$ (严格说来,将一周后 A' 点的函数元素和开始时 A 点的函数元素相比较,其差用 $[\]_{\pm 1}$ 表示,而 $[\]_{\pm 1}$ 演算和微分演算是可换的)。

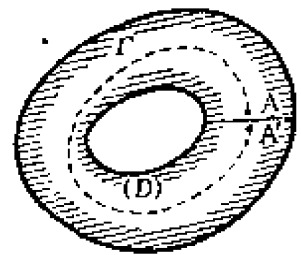


图 8.1

应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 在区域 (D) 必須是单值的, 因为在任一点的应力不可能具有两个不同的值。从而由(4.10)可知 $\operatorname{Re}[\varphi'(z)]$ 是单值的。同时由于 $\varphi''(z)$ 的实部和虚部都可表示为 $\operatorname{Re}[\varphi'(z)]$ 的导数, 因此它也必須是单值的。最后再由(4.11)可知 $\psi'(z)$ 是单值的。即根据力学意义必須成立如下条件:

$$\operatorname{Re}[\varphi'(z)]_A' = 0, \quad [\varphi''(z)]_A' = 0, \quad [\psi''(z)]_A' = 0. \quad (8.1)$$

由此首先有

$$[\varphi'(z)]_A' = iC, \quad [\psi'(z)]_A' = \beta, \quad (8.2)$$

然后推出

$$[\varphi(z)]_A' = iCz + \alpha, \quad [\psi(z)]_A' = \beta z + \gamma, \quad (8.3)$$

在此 C 是实常数, α, β, γ 是复常数, z 是 A 点的复数坐标。这四个常数 (按实数說是七个常数) 不論在圍道 Γ 上取那一个点作为 A 点都是相同的。又对于与 Γ 同倫的圍道 (即不逸出区域 (D) 外而可連續变到 Γ 的圍道) 也都相同, 且对于圍道相加, 其对应常数也相加, 即 Γ 同倫于二圍道 Γ_1 与 Γ_2 之和 $\Gamma_1 + \Gamma_2$ 时, 則对于 Γ 的 C, α, β, γ 等于它們对于 Γ_1 及 Γ_2 的各对应值之和。因此, 若想知道在区域 (D) 中函数 $\varphi(z), \psi(z)$ 的多值性, 必須而且只須知道这些常数对于 (D) 內圍道的同調群的基底的值。簡單說来, 若 (D) 有几个孔, 那末只須作那些分別繞每孔一周的圍道, 知道了这些圍道上的常数值就够了。

再者, 为了說明这些常数 C, α, β, γ 的力学意义, 我們將利用(4.13)来討論 $[u]_A'$ 及 $[v]_A'$ 。因为 $[]_A'$ 是綫性运算, 所以

$$[u - iv]_A' = \frac{1}{2G} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} (-iC\bar{z} + \bar{\alpha}) - \{z iC + \beta\} \right], \quad (8.4)$$

分开此式的实部和虚部, 則得

$$\left. \begin{aligned} [u]_A' &= -\frac{4}{E} C y + \frac{3-\nu}{E} \alpha' - \frac{1+\nu}{E} \beta', \\ [v]_A' &= +\frac{4}{E} C x + \frac{3-\nu}{E} \alpha'' + \frac{1+\nu}{E} \beta'. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

再由(4.10)可求得 $[\tilde{\omega}]_A^{A'}$ 。由此及(8.5)得到如下三式:

$$\left. \begin{aligned} [\tilde{\omega}]_A^{A'} &= \frac{4}{E} C, \quad [\xi]_A^{A'} = [u + \tilde{\omega}y]_A^{A'} = \frac{3-\nu}{E} \alpha' - \frac{1+\nu}{E} \beta', \\ [\eta]_A^{A'} &= [v - \tilde{\omega}x]_A^{A'} = \frac{3-\nu}{E} \alpha' + \frac{1+\nu}{E} \beta'. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

这三个量称为围道 Γ 上的位错分量[注1]。

其次,由(4.1)可知,对于和 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 相对应的 Airy 应力函数,有如下关系式成立:

$$[F]_A^{A'} = (\alpha'' + \beta')x + (\alpha' - \beta')y + \gamma'. \quad (8.7)$$

所以

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_A^{A'} = \alpha' + \beta', \quad \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_A^{A'} = \alpha' - \beta'. \quad (8.8)$$

按照 $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ 的力学意义(2.13),它们和从围道 Γ 的右侧作用于左侧的力的合力有关。现在令从围道 Γ 的左侧作用于右侧的力的合力为 (X, Y) , 且令关于原点的合力矩为 M_0 , 则有

$$X = -\alpha' + \beta', \quad Y = \alpha' + \beta', \quad M_0 = -\gamma'. \quad (8.9)$$

(为了将 X, Y, M_0 与作用于孔的外力的合力及合力矩相联系,故在此取负侧进行讨论)。

由以上所述,我们知道了 $C, \alpha', \alpha', \beta', \beta', \gamma'$ 的力学意义。仅有一个常数 γ' 无力学意义。

[注1] 在多连通区域情形,位移 u, v 及旋转 $\tilde{\omega}$ 的决定可讨论如下:

当协调条件(3.7)到处成立时,则全微分方程

$$d\tilde{\omega} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx + \left(-\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) dy \quad (8.10)$$

是可积的,所以由此可决定旋转 $\tilde{\omega}(x, y)$ 。再利用它可考虑全微分方程

$$du = \varepsilon_x dx + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} - \tilde{\omega} \right) dy, \quad dv = \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} + \tilde{\omega} \right) dx + \varepsilon_y dy, \quad (8.11)$$

这些方程是可积的,由此可决定位移 u 及 v 。若在点 A 有 $u=v=\tilde{\omega}=0$, 则积分常数就可确定,故在单连通区域的情形,位移及旋转可唯一决定。

在多连通区域的情形,即使协调条件(3.7)到处成立,对所决定的 $u, v, \tilde{\omega}$

也不一定是单值函数。但是作为特殊情形,存在着它們都是单值函数,而不具位錯的彈性体。在有位錯时,位錯分量由

$$[\tilde{\omega}] = \oint d\tilde{\omega}, [\xi] = \oint (du + ydv), [\eta] = \oint (dv - x d\tilde{\omega}) \quad (8.12)$$

所决定。右边的 $d\tilde{\omega}$, du , dv 和(8.10), (8.11) 中的相同,积分是沿任意圍道进行的。它們对于同倫的圍道有相同的值。此时 u , v , $\tilde{\omega}$ 都是多值函数,多值性由上述位錯分量的公式,对各独立圍道积分所得的值来决定。

例 設复应力函数为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= Lz \log z + M \log z + f_1(z), \\ \psi(z) &= Nz \log z + K \log z + f_2(z), \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

其中 L 是实数, M, N, K 是复数, $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 是单值函数。假設圍道 Γ 环绕原点,我們来求位錯的三个分量、合力与合力矩。

当沿圍道 Γ 繞行一周时,有

$$\left. \begin{aligned} [\varphi(z)] &= 2\pi i L z + 2\pi i M, \\ [\psi(z)] &= 2\pi i N z + 2\pi i K, \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

即在(8.3)式內常数 U, α, β, γ 为

$$C = 2\pi L, \quad \alpha = 2\pi i M, \quad \beta = 2\pi i N, \quad \gamma = 2\pi i K. \quad (8.15)$$

因此得

$$\left. \begin{aligned} \alpha^* &= -2\pi M', \quad \alpha' = 2\pi M^*, \quad \beta^* = -2\pi N', \quad \beta' = 2\pi N^*, \\ \gamma^* &= -2\pi K', \quad \gamma' = 2\pi K^*. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

将这些值代入(8.6), (8.9), 即得

$$\left. \begin{aligned} [\tilde{\omega}] &= \frac{8\pi}{E} L, \quad [\xi] = \frac{2\pi}{E} \{ -(3-\nu)M' + (1+\nu)N' \}, \\ [\eta] &= \frac{2\pi}{E} \{ (3-\nu)M^* + (1+\nu)N^* \}, \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

$$X = 2\pi(-M^* + N^*), \quad Y = 2\pi(-M' - N'), \quad M_0 = 2\pi K'. \quad (8.18)$$

[注2] 在(8.13)中由于項 L, M, N, K 的存在,因此它是表示圍繞原点具有多值性的一个重要公式。同样,对于圍繞点 a 的多值性的公式乃是将(8.13)的 $\log z$ 代以 $\log(z-a)$ 而得到的。于是 L, M, N, K 的物理意义由(8.17), (8.18)給出。將它們結合起来,即得

$$[\tilde{\omega}] = \frac{8\pi}{E} L, \quad [\xi + i\eta] = \frac{2\pi i}{E} \{ (3-\nu)M + (1+\nu)\bar{N} \}, \quad (8.19)$$

$$X + iY = 2\pi(-M + \bar{N}), \quad M_0 = 2\pi K'. \quad (8.20)$$

若將它們解开,則有

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{E}{8\pi} [\tilde{\omega}], \quad M = \frac{E}{8\pi} [\eta - i\xi] - \frac{1+\nu}{8\pi} (X + iY), \\ N &= \frac{E}{8\pi} [\eta + i\xi] + \frac{3-\nu}{8\pi} (X - iY), \quad K = K' + \frac{iM_0}{2\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

§9 坐标变换

以上讨论都是对一个直角坐标系进行的。下面我们讨论由一个直角坐标系变到另一个直角坐标系时，复应力函数的变换法则。

1. 坐标系的平移 在坐标系 Oxy 中用平移将原点移到点 $z = \alpha$ ，命新坐标为 (x_1, y_1) ，设 $z_1 = x_1 + iy_1$ ，则

$$z_1 = z - \alpha. \quad (9.1)$$

对于新坐标定义的应力函数以及其他的量，都将附加标号 1 以示区别。若标准化的条件不变，Airy 应力函数是不变的（见 §2 的力学意义），即 $F_1(x_1, y_1) = F(x, y)$ 。因而 $-P_{y_1}$

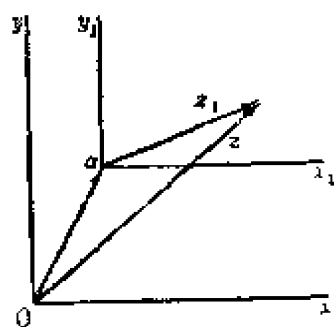


图 9.1

$= \partial F_1 / \partial x_1 = \partial F / \partial x = -P_y$, $P_{x_1} = \partial F_1 / \partial y_1 = \partial F / \partial y = P_y$ ，同时位移 (u, v) 的分量也不变。于是由 (4.2) 得

$$\varphi_1(z_1) = \varphi(z). \quad (9.2)$$

此外，根据 (4.1)，易见必有

$$\operatorname{Re}[\bar{z}_1 \varphi_1(z_1) + \psi_1(z_1)] = \operatorname{Re}[\bar{z} \varphi(z) + \psi(z)],$$

再将 (9.2) 代入该式，即得

$$\operatorname{Re}[\psi_1(z_1)] = \operatorname{Re}[\psi(z) + \bar{\alpha} \varphi(z)]. \quad (9.3)$$

因此

$$\psi_1(z_1) = \psi(z) + \bar{\alpha} \varphi(z) + (\text{虚常数}). \quad (9.4)$$

又因附加项中虚常数的存在与否并不影响问题的解，所以可取为零，即有

$$\psi_1(z_1) = \psi(z) + \bar{\alpha} \varphi(z). \quad (9.5)$$

因此复应力函数的变换公式可由(9.2)及(9.5)表示之。(9.5)又可改写为如下表达式:

$$\bar{z}_1 \varphi_1(z_1) + \psi_1(z_1) = \bar{z} \varphi(z) + \psi(z). \quad (9.6)$$

例1 在无限平面的一点 $z = \alpha$ 处作用着外力 (X, Y) , 求该应力状态的复应力函数。

关于 $z_1 = z - \alpha$ 的复应力函数, 根据 §8 注2 可写成下列形式

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= M \log z_1, & \psi_1(z_1) &= N z_1 \log z_1, \\ M &= -\frac{1+\nu}{8\pi} (X + iY), & N &= \frac{3-\nu}{8\pi} (X - iY). \end{aligned} \quad (9.7)$$

再利用 z_1 与 z 的坐标变换 $z_1 = z - \alpha$, 换回到原来的坐标系, 首先由(9.2)有

$$\varphi(z) = \varphi_1(z_1) = M \log(z - \alpha), \quad (9.8)$$

再由(9.5)可得

$$\psi(z) = N(z - \alpha) \log(z - \alpha) - \bar{\alpha} M \log(z - \alpha). \quad (9.9)$$

2. 坐标系的旋转 命坐标系 Oxy 绕原点旋转 δ 角而变成新坐标系 Ox_1y_1 (图 9.2); 令 $z_1 = x_1 + iy_1$, 则

$$z_1 = z e^{-i\delta}. \quad (9.10)$$

此时 Airy 应力函数也不变, 即

$$F_1(x_1, y_1) = F(x, y).$$

由于它的梯度与位移服从同样的向量变换法则, 所以由(4.2) (即 $-P_y + iP_x = \partial F / \partial x + i \partial F / \partial y$) 而有

$$\varphi_1(z_1) = \varphi(z) e^{-i\delta}. \quad (9.11)$$

这一式可写成 $\bar{z}_1 \varphi_1(z_1) = \bar{z} \varphi(z)$. 将其代入(4.1)即得

$$\psi_1(z_1) = \psi(z). \quad (9.12)$$

因此复应力函数的变换公式可由(9.11)及(9.12)表示之。

例2 对 §6 的例2, 假设坐标系旋转了一个角 $\delta = \frac{\pi}{2}$, 求新坐标的复应力函数。

将(6.10)和坐标变换式 $z_1 = z e^{-i\frac{\pi}{2}} = -iz$ 代入(9.11)和(9.12), 即得

$$\varphi_1(z_1) = -i\varphi(z) = -iCz^2 = iCz_1^2,$$

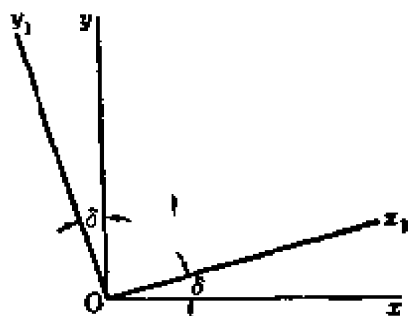


图 9.2

$$\psi_1(z_1) = \psi(z) = Cz^3/3 = -iCz_1^3/3.$$

因此在新坐标系中,复应力函数为

$$\varphi_1(z_1) = iCz_1^2, \quad \psi_1(z_1) = -iCz_1^3/3. \quad (9.13)$$

这组函数表示沿着 x_1 轴方向延伸的梁受弯曲时的应力状态。

例 3 求在坐标系旋转下应力分量的变换公式。

利用 (9.10) ~ (9.12) 的关系式

$$z_1 = ze^{-i\theta}, \quad \varphi_1(z_1) = \varphi(z)e^{-i\theta}, \quad \psi_1(z_1) = \psi(z),$$

易得

$$\varphi_1'(z_1) = \varphi'(z), \quad \varphi_1''(z_1) = \varphi''(z)e^{i\theta}, \quad \psi_1''(z_1) = \psi''(z)e^{2i\theta}.$$

又利用 $\bar{z}_1 = \bar{z}e^{i\theta}$ 和上式即得到

$$\bar{z}_1\varphi_1''(z_1) + \psi_1''(z_1) = \{\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)\}e^{2i\theta}.$$

于是

$$\frac{\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1}}{4} + i\frac{E}{4}\bar{\omega}_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} + i\frac{E}{4}\bar{\omega}, \quad (9.14)$$

$$\frac{\sigma_{y_1} - \sigma_{x_1}}{2} + i\tau_{x_1y_1} = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy}\right)e^{2i\theta}. \quad (9.15)$$

容易验证该变换公式和张量分量的变换公式是一致的。

3. 反照变换 对于沿着 x 轴对称的反照变换 (图 9.3), 记新坐标为 (x_1, y_1) , 且设 $z_1 = x_1 + iy_1$, 则有

$$z_1 = \bar{z}. \quad (9.16)$$

由于在反照变换下右侧与左侧互换, 而力矩的符号也交换正负, 故 Airy 应力函数对于反照变换, 从它的物理意义可知是不变的。即 $F_1(x_1, y_1) = F(x, y)$ ①。从而

$\partial F_1/\partial x_1 = \partial F/\partial x$, $\partial F_1/\partial y_1 = -\partial F/\partial y$ 。又位移分量变为 $u_1 = u$, $v_1 = -v$, 所以由 (4.2) 可知

$$\varphi_1(z_1) = \overline{\varphi(z)}. \quad (9.17)$$

于是 $\bar{z}_1\varphi_1(z_1) = \overline{z\varphi(z)}$ 。因此得 $\text{Re}[\bar{z}_1\varphi_1(z_1)] = \text{Re}[\bar{z}\varphi(z)]$ 。由此

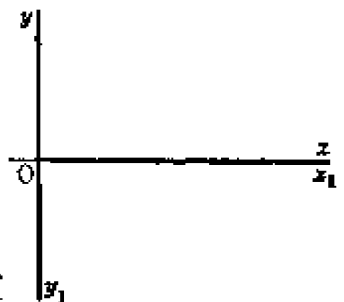


图 9.3

① 也可从关系式 (2.8) 与 (2.9) 先来说明合力 P_x, P_y 的变换关系, 然后再利用 (2.13) 来说明 $F_1(x_1, y_1) = F(x, y)$ 。——校者注

关系及 Airy 应力函数的不变性得 $\operatorname{Re}[\psi_1(z_1)] = \operatorname{Re}[\psi(z)]$ 。而 $\psi_1(z_1)$ 是 $z_1 = \bar{z}$ 的正則函数, 所以(取附加虚常数为零时)

$$\psi_1(z_1) = \overline{\psi(z)}. \quad (9.18)$$

因此即得到在反照变换(9.16)下表示复应力函数变换法則的公式(9.17)及(9.18)。

例4 当位移关于 x 軸对称时, 求复应力函数的性质。

因为此时对于 $z_1 = \bar{z}$ 的变换, 复应力函数必須是不变的, 即 $\varphi_1(z_1) = \varphi(z_1)$, $\psi_1(z_1) = \psi(z_1)$ 。另一方面根据(9.17)和(9.18), $\varphi_1(z_1) = \bar{\varphi}(\bar{z})$, $\psi_1(z_1) = \bar{\psi}(\bar{z})$ 。因此必須 $\varphi(z) = \bar{\varphi}(\bar{z})$, $\psi(z) = \bar{\psi}(\bar{z})$ 。这就是

$$\varphi(z) = \bar{\varphi}(\bar{z}), \quad \psi(z) = \bar{\psi}(\bar{z}). \quad (9.19)$$

这个条件的另一种說法, 就是 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 仅具有实系数(也就是說, 它們在实軸上任意点处的 Taylor 展开式仅具有实系数)。

例5 位移关于原点对称时, 求复应力函数的性质。

这相当于坐标系以 $\delta = \pi$ 旋轉而应力函数不变的情形, 即 $z_1 = -z$ 时, 必有

$$\varphi_1(z_1) = \varphi(z_1), \quad \psi_1(z_1) = \psi(z_1).$$

另一方面, 在(9.11), (9.12)內設 $\delta = \pi$, 則

$$\varphi_1(z_1) = -\varphi(z), \quad \psi_1(z_1) = \psi(z),$$

所以

$$\varphi(-z) = -\varphi(z), \quad \psi(-z) = \psi(z), \quad (9.20)$$

即 $\varphi(z)$ 必須是奇函数, $\psi(z)$ 是偶函数($\psi'(z)$ 是奇函数)。

由上述三种情形的討論, 即得到如下两个結論:

- (1) $\varphi(z)$ 与 $u + iv$ 具有相同的变换法則。
- (2) $\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)$ 对于非反照的变换是不变的, 对于反照变换則变成它本身的共軛复数。

这两个結論对于一般坐标变换也成立, 因为所有的一般坐标变换都是由这三个基本变换所組成的。

最后关于“量綱”說上几句话。力的量綱用 kg 表示, 长度的量, 綱用 cm 表示; 由(4.2)可知 $\varphi(z)$ 的量綱是 kg/cm。由(4.3)可知 $\psi(z)$ 的量綱是 kg。由此可知长度的尺度变动时的变换公式。

§10 周 期 性

若应力状态对于变换

$$z \rightarrow z+h \quad (h \text{ 为实数}) \quad (10.1)$$

不变,即沿着 x 轴具有周期 h ,则其充要条件是复应力函数具有如下形式的表达式:

$$\varphi(z) = iCz^2 + Az + f_1(z), \quad (10.2)$$

$$\psi(z) = \int^z \{-z\varphi'(z) + iCz^2 + Bz + f_2(z)\}dz, \quad (10.3)$$

其中 C 是实数, A, B 是复数, $f_1(z), f_2(z)$ 是以 h 为周期的函数。

証明 充分性: 假如复应力函数是 (10.2), (10.3) 的形式, 则应力状态有周期 h 。

首先由 (10.2) 易得

$$\begin{aligned} \varphi(z+h) - \varphi(z) &= iC(2hz + h^2) \\ &\quad + Ah, \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\varphi'(z+h) - \varphi'(z) = iC2h, \quad (10.5)$$

$$\varphi''(z+h) - \varphi''(z) = 0. \quad (10.6)$$

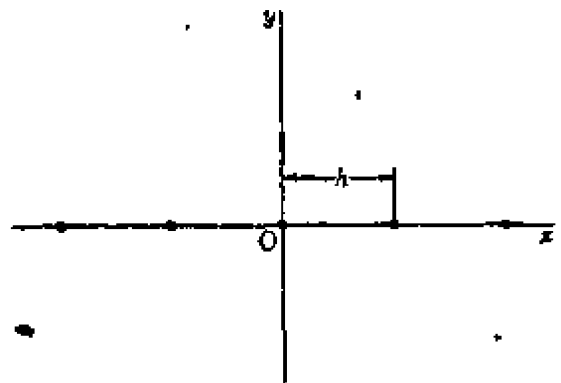


图 10.1

再由 (10.3) 易得

$$\psi'(z+h) - \psi'(z) = -h\varphi'(z) + iCh^2 + Bh, \quad (10.7)$$

$$\psi''(z+h) - \psi''(z) = -h\varphi''(z). \quad (10.8)$$

于是由 (10.5) 可知, $(\sigma_x + \sigma_y)/4 = \operatorname{Re}[\varphi'(z)]$ ① 对于变换 (10.1) 不变。而由 (10.6) 和 (10.8) 可知, $(\sigma_y - \sigma_x)/2 + i\tau_{xy} = \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)$ ② 对于变换 (10.1) 也不变。因此即得应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 对于变换 (10.1) 不变。

必要性: 假设应力状态对于变换 (10.1) 不变, 则复应力函数可写成 (10.2), (10.3) 的形式。

由于 $(\sigma_x + \sigma_y)/4 = \operatorname{Re}[\varphi'(z)]$ 对于变换 (10.1) 不变, 所以 $\varphi''(z)$ 也必须对于变换 (10.1) 不变 (因为它的实部虚部都可由 $\operatorname{Re}[\varphi'(z)]$ 的导数给出), 因

① 通过这两个关系式将应力分别求出, 才可看出应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 对于变换 (10.1) 不变。——校者注

此(10.6)成立。将(10.6)积分即得到形同(10.5)的式子,其中积分常数必须是虚数(因为 $\operatorname{Re}[\varphi'(z)]$ 是不变的)。因此可将它写成 $iC2h$ (C 是实数)的形式,从而得到了(10.5)。再将(10.5)积分,即得到(10.4),其中 A 是复常数。因此由(10.4)知 $\varphi(z)$ 可写成(10.2)的形式,其中 $f_1(z)$ 对于变换(10.1)是不变的。

另一方面,由于

$$(\sigma_y - \sigma_x)/2 + i\tau_{xy} = \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)$$

是不变的,由此导出(10.8)。将它积分并写成(10.7)的形式(B 是复常数),因此由(10.7)可知 $\psi(z)$ 能写成(10.3)的形式,其中 $f_2(z)$ 对于变换(10.1)是不变的。(証毕)

[注1] 容易知道(10.2)及(10.3)各项的物理意义。即其中 C 项代表均匀弯曲(§9, 例1), A, B 项代表均匀应力状态(§6, 例1), $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 项代表在一个周期間的微小变化。

此外,利用对坐标系旋轉角度 $\frac{\pi}{2}$ (§9),可以得到沿着 y 軸方向具有周期性的应力状态,它們的复应力函数如下:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= Cz^3 + Az + (\text{周期函数}), \\ \psi(z) &= \int^z \{z\varphi'(z) - Cz^3 + Bz + (\text{周期函数})\} dz, \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

此处 C 是实数, A, B 是复数。

[注2] 对于具有多圓孔的无限板及帶板的拉伸問題,若不从本节的討論出发,有时求不出准确的复应力函数。

§11 各种表达式

对于§4定义的复应力函数,在上面展开了一般理論的討論。但应力函数除我們所处理的方法以外,还有其他各种方法。今將它們和以上所討論的 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 間的关系联系起来叙述如下。

1. 横田的应力一般式 [Yokota, S.: Proc. Tokyo Math-Phys. Soc., 8(1915), 38~50; 机械学会志, 18卷38号(大正4年)1~29] 將他的应力函数 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 用本书的 $\varphi(z), \psi(z)$ 表示出来,則得

$$f_1(z) = 2\varphi'(z), \quad f_2(z) = -2\{z\varphi''(z) + \psi''(z)\}. \quad (11.1)$$

又位移公式中的函数 $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ 用我們的記号表示时, 則有

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{4}{1+\nu} \varphi(z), \\ \psi_1(z) &= -\frac{i}{2G} \{z\varphi'(z) + \psi'(z) + \varphi(z)\}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

又在 Love 的著作 [Love, A. E. H.: Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed. (1927), 204~206] 中 § 144 的公式里有三个調和函数 ξ , η , f ; 它們和我們的复应力函数間有如下关系:

$$\xi + i\eta = \frac{4}{1+\nu} \varphi(z), \quad f = -\frac{1}{2G} \operatorname{Re}[z\varphi(z) + \psi(z)]. \quad (11.3)$$

2. Bricas 的一般式 [Bricas, M.: La Théorie de l'Élasticité Bidimensionnelle, 1936] 他用的三个調和函数 Φ , Ψ , f 和我們的 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 間有如下关系:

$$\Phi + i\Psi = \frac{4}{1+\nu} \varphi(z), \quad f = -\frac{1}{2G} \operatorname{Re}[\psi(z)]. \quad (11.4)$$

3. 大久保 [大久保肇: 日本机械学会論文集, 7 (昭和 16 年), 28 号, I-23] 所用的函数 $\varphi_1(z)$ 及 $\varphi_2(z)$ 在 $k \rightarrow 1$ 时和我們的 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 間有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 1} [(k-1)\varphi_1(z)] &= -2\varphi'(z), \\ \lim_{k \rightarrow 1} [k\varphi_1(z) + \varphi_2(z)] &= z\varphi''(z) + \psi''(z). \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

4. 池田 [池田健: 航研报告, 19 (1943), 249~277] 的一般式里的諸函数, 在各向同性情形和我們的 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 間有如下关系:

$$f_1(z) = z\varphi(z) + \psi(z), \quad f_2(z) = -2i\varphi(z); \quad (11.6)$$

$$\phi_1(z) = 4\varphi'(z), \quad \phi_2(z) = -2\{z\varphi''(z) + \psi''(z)\}. \quad (11.7)$$

5. 佐藤 [佐藤常三: 平面应力問題の新解析法 (1948)] 的 H -

复变函数的理論里，在各向同性的情形所用的函数 $P(z)$ 及 $R(z)$ 与我們的 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 間的关系如下：

$$P(z) = 4\varphi'(z), \quad R(z) = z\varphi''(z) + \psi''(z) - 2\varphi'(z). \quad (11.8)$$

且在他的理論里所用函数 b 的力学意义不明；若用他的記号則有 $b = E_x\tilde{\omega} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\tau/2$ ，特別在各向同性时用我們的記号写出时則有 $b = E\tilde{\omega} + \tau_{xy}$ ，此处必須特別加以注意。

6. Wangerin 的解法 [例如最上武雄：2次元彈性理論（昭和17年），216~221] 里的函数 ϕ , ψ 可各設为

$$\phi = \frac{1-\nu}{E} F, \quad \psi = \frac{2}{E} H, \quad (11.9)$$

但

$$F + iH = \bar{z}\varphi(z) + \psi(z). \quad (11.10)$$

即 F 及 H 分別是 $\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)$ 的实部及虚部， F 与 Airy 应力函数 (4.1) 一致， H 也是重調和函数，可以叫作“共軛于 F 的重調和函数”。

7. Jeffery [Jeffery, G. B.: Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A 221** (1920), 265] 他在計算位移时引入了一个函数 Q ， Q 与 (11.10) 中的 H 有如下关系：

$$Q = \frac{2}{1+\nu} H. \quad (11.11)$$

他的解法是先确定 Airy 应力函数 F ，然后决定函数 Q 。而本书的解法是先决定 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ ，然后同时确定 F 及 H （或者直接求出位移和应力），我們的方法似乎要好一些。

第3章 应力函数的表达式^①

§12 圆板上的 Taylor 级数展开

若在圆板的边界上受有载荷，我们来考虑求它的应力分布的一般解法。

设圆板的半径为 a ，取圆心为直角坐标系 Oxy 的原点。设 $z = x + iy$ ，由于载荷在边界上，因此对不论怎样的载荷，复应力函数 $\varphi(z)$ ， $\psi(z)$ 在圆 $|z| < a$ 内都是单值正则的。因此在 $z=0$ 附近可展成如下的 Taylor 级数：

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n. \quad (12.1)$$

这些级数对 $|z| < a$ 收敛，且可逐项微分，即

$$\varphi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n z^{n-1}, \quad \psi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n z^{n-1}, \quad (12.2)$$

$$\varphi''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n z^{n-2}, \quad \psi''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) B_n z^{n-2}. \quad (12.3)$$

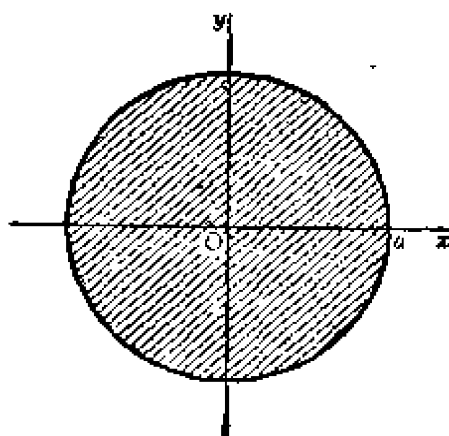


图 12.1

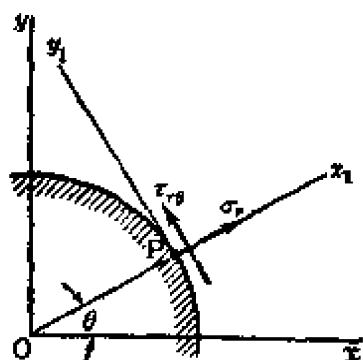


图 12.2

① 根据本章内容，似应为“复应力函数的表达式”。——校者注

(12.1)中的系数 A_n, B_n 一般是复数,如果选取它們使問題的边界条件得到滿足,則应力状态就完全决定。

假設作为边界条件,已知在边界上各点的徑向应力 σ_r 及切向应力 $\tau_{r\theta}$ (图12.2)。为了得到适合这种边界条件的系数,那就必須首先导出应力 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ 用 $\varphi'(z)$ 及 $\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)$ 表示的表达式。为此,在圓周上任意点 P (半徑 OP 与 x 軸的夹角为 θ) 处引入坐标系 Px_1y_1 如图12.2,再用应力的变换公式(9.14)及(9.15)即得

$$\frac{\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1}}{4} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} = \operatorname{Re}[\varphi'(z)], \quad (12.4)$$

$$\frac{\sigma_{y_1} - \sigma_{x_1}}{2} + i\tau_{x_1y_1} = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy} \right) e^{2i\theta} = \{ \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \} e^{2i\theta}. \quad (12.5)$$

此处 $\sigma_{x_1}, \tau_{x_1y_1}$ 即分別为 σ_r 及 $\tau_{r\theta}$, 因此由(12.4)的二倍减(12.5)消去 σ_{y_1} , 得

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 2\operatorname{Re}[\varphi'(z)] - \{ \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \} e^{2i\theta}. \quad (12.6)$$

将(12.2), (12.3)和 $z = ae^{i\theta}$ 代入上式,得

$$\begin{aligned} \sigma_r - i\tau_{r\theta} &= 2\operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n A_n a^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \right] \\ &\quad - \left\{ a e^{-i\theta} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n a^{n-2} e^{i(n-2)\theta} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) B_n a^{n-2} e^{i(n-2)\theta} \right\} e^{2i\theta} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n A_n a^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{A}_n a^{n-1} e^{-i(n-1)\theta} \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n a^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) B_n a^{n-2} e^{in\theta}. \end{aligned} \quad (12.7)$$

另一方面,将边界上已知的应力 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ 展成如下的 Fourier 級数

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta), \\ \tau_{r\theta} &= a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta), \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

將它們結合起來，即得

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n \cos n\theta + \bar{b}_n \sin n\theta), \quad (12.9)$$

其中 $\bar{a}_n = a'_n - ia'_n$, $\bar{b}_n = b'_n - ib'_n$. 若將 (12.9) 改寫成 (12.7) 的形式，則得

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2} e^{in\theta} + \frac{\bar{a}_n + i\bar{b}_n}{2} e^{-in\theta} \right). \quad (12.10)$$

再利用 (12.7) 與 (12.10) 中同類項系數相等的關係，即可決定 A_n 和 B_n . 為此，先比較常數項，得

$$\bar{a}_0 = A_1 + \bar{A}_1 = 2A_1, \quad (12.11)$$

比較 $e^{i\theta}$ 項，得

$$\frac{\bar{a}_1 - i\bar{b}_1}{2} = 0, \quad (12.12)$$

再比較一般項 $e^{in\theta}$ ($n \geq 2$)，得

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2} &= (n+1) A_{n+1} a^n - (n+1) n A_{n+1} a^n \\ &\quad - n(n-1) B_n a^{n-2} \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad (12.13)$$

最後比較 $e^{-in\theta}$ ($n \geq 1$) 項，得

$$\frac{\bar{a}_n + i\bar{b}_n}{2} = (n+1) \bar{A}_{n+1} a^n \quad (n \geq 1). \quad (12.14)$$

由 (12.11) 可知 \bar{a}_0 為實數，因此解存在的必要條件之一為 [注1]

$$a'_0 = 0. \quad (12.15)$$

於是，由 (12.11) 得

$$A_1 = a'_0/2, \quad (12.16)$$

因此 A_1 的實部就被決定。

其次，由 (12.12) 可導出另外兩個解的存在條件，

$$a'_1 - b'_1 = 0, \quad a'_1 + b'_1 = 0. \quad (12.17)$$

由 (12.14) 可得到決定系數 A_n 的公式

$$A_n = \frac{a_{n-1} - ib_{n-1}}{2na^{n-1}} \quad (n \geq 2), \quad (12.18)$$

将此值代入(12.13), 即得

$$B_n = -\frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2n(n-1)a^{n-2}} - \frac{a_n - ib_n}{2na^{n-2}} \quad (n \geq 2). \quad (12.19)$$

另外还有 A'_1, A_0, B_0, B_1 (就实数来说是七个) 未决定, 这由 §7 的讨论得知是当然的事情。因为对于一定的应力状态, 它的复应力函数必然要有这样的不确定性 (见 (7.1))。因此为了简化, 可假设它们为零。也就是在原点 $z=0$ 处设 $\text{Im} [\varphi'(z)], \varphi(z), \psi(z), \psi'(z)$ 都等于零。

这样地决定了所有系数之后, 即可得到如下的复应力函数的表达式:

$$\varphi(z) = \frac{a_0}{2} z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1} - ib_{n-1}}{2na^{n-1}} z^n, \quad (12.20)$$

$$\psi(z) = - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2n(n-1)a^{n-2}} + \frac{a_n - ib_n}{2na^{n-2}} \right\} z^n. \quad (12.21)$$

于是

$$\varphi'(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1} - ib_{n-1}}{2a^{n-1}} z^{n-1}, \quad (12.22)$$

$$\psi'(z) = - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2(n-1)a^{n-2}} + \frac{a_n - ib_n}{2a^{n-2}} \right\} z^{n-1}, \quad (12.23)$$

$$\varphi''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1} - ib_{n-1}}{2a^{n-1}} (n-1) z^{n-2}, \quad (12.24)$$

$$\psi''(z) = - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2a^{n-2}} + \frac{a_n - ib_n}{2a^{n-2}} (n-1) \right\} z^{n-2}. \quad (12.25)$$

对应力采用图 12.3 所示的记号, 将它和 (12.22), (12.24), (12.25) 以及

$$z = re^{i\theta} \quad (12.26)$$

一并代入变换公式 (12.4) 和 (12.5), 即得

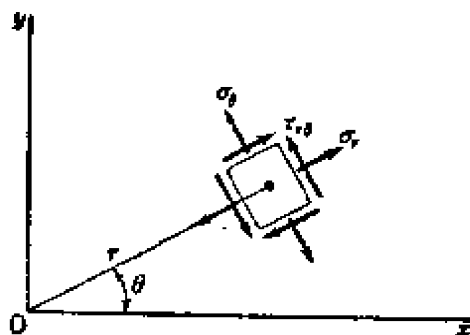


圖 12.3

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{4} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} = \operatorname{Re}[\varphi'(z)] \\
 &= \operatorname{Re}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1} - ib_{n-1}}{2a^{n-1}} z^{n-1}\right] \\
 &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \operatorname{Re}[(a_{n-1} - ib_{n-1})e^{i(n-1)\theta}] \\
 &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \{(a'_n + b'_n) \cos n\theta - (a'_n - b'_n) \sin n\theta\},
 \end{aligned} \tag{12.27}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} + i\tau_{r\theta} &= \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy}\right) e^{2i\theta} = \{2\varphi''(z) + \psi''(z)\} e^{2i\theta} \\
 &= \left[r e^{-i\theta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1} - ib_{n-1}}{2a^{n-1}} (n-1) r^{n-2} e^{i(n-2)\theta} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2a^{n-2}} + \frac{a_n - ib_n}{2a^{n-2}} (n-1) \right\} r^{n-2} e^{i(n-2)\theta} \right] e^{2i\theta} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n - ib_n) e^{in\theta} \\
 &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (\bar{a}_n - i\bar{b}_n) + \frac{n-1}{2} (a_n - ib_n) \right\} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} e^{in\theta}.
 \end{aligned} \tag{12.28}$$

因此易得

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^n \{(a'_n + b'_n) \cos n\theta - (a'_n - b'_n) \sin n\theta\} \\
 &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \left\{ \left(\frac{n}{2} a'_n + \frac{n-2}{2} b'_n\right) \cos n\theta \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{n-2}{2} a'_n - \frac{n}{2} b'_n\right) \sin n\theta \right\},
 \end{aligned} \tag{12.29}$$

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^n \{ (a'_n - b'_n) \cos n\theta + (a'_n + b'_n) \sin n\theta \} \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \left\{ \left(\frac{n-2}{2} a'_n - \frac{n}{2} b'_n \right) \cos n\theta \right. \\ & \left. + \left(\frac{n}{2} a'_n + \frac{n-2}{2} b'_n \right) \sin n\theta \right\}.\end{aligned}\quad (12.30)$$

以2乘(12.27)并分别与(12.29)相加、相减,即得到

$$\begin{aligned}\sigma_r = & a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^n \{ (a'_n + b'_n) \cos n\theta - (a'_n - b'_n) \sin n\theta \} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \left\{ \left(\frac{n}{2} a'_n + \frac{n-2}{2} b'_n \right) \cos n\theta \right. \\ & \left. - \left(\frac{n-2}{2} a'_n - \frac{n}{2} b'_n \right) \sin n\theta \right\},\end{aligned}\quad (12.31)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta = & a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^n \{ (a'_n + b'_n) \cos n\theta - (a'_n - b'_n) \sin n\theta \} \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \left\{ \left(\frac{n}{2} a'_n + \frac{n-2}{2} b'_n \right) \cos n\theta \right. \\ & \left. - \left(\frac{n-2}{2} a'_n - \frac{n}{2} b'_n \right) \sin n\theta \right\}.\end{aligned}\quad (12.32)$$

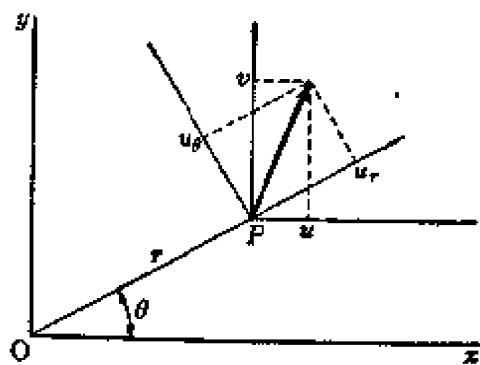


图 12.4

若对于位移采用如图12.4所示的记号,即 u_r 表示径向位移, u_θ 表示圆的环向位移,则

$$u_r - iu_\theta = (u - iv)e^{i\theta} \quad (12.33)$$

成立。先将(12.20), (12.22), (12.23)代入(4.13),然后将结果代入(12.33),即得

$$\begin{aligned}u_r - iu_\theta = & \frac{e^{i\theta}}{E} \left[(3-\nu) \left(\frac{a_0}{2} r e^{-i\theta} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{a}_{n-1} + i\bar{b}_{n-1}}{2na^{n-1}} r^n e^{-in\theta} \right) \right. \\ & \left. - (1+\nu) \left\{ r e^{-i\theta} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1} - ib_{n-1}}{2a^{n-1}} r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \right) \right\} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2(n-1)a^{n-2}} + \frac{a_n - ib_n}{2a^{n-2}} \right) r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \Bigg] \\
& = \frac{a}{E} \left[(1-\nu) a_0 \left(\frac{r}{a} \right) + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left\{ \frac{3-\nu}{2} \frac{\bar{a}_1 + i\bar{b}_1}{2} e^{-i\theta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1+\nu}{2} (a_1 - ib_1) e^{i\theta} \right\} \right. \\
& \quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^{n+1} \left\{ \frac{3-\nu}{2} \frac{\bar{a}_n + i\bar{b}_n}{n+1} e^{-in\theta} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1+\nu}{2} (a_n - ib_n) e^{in\theta} \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} \frac{1+\nu}{2} \left\{ \frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{n-1} + (a_n - ib_n) \right\} e^{in\theta} \right].
\end{aligned} \tag{12.34}$$

將實部和虛部分開，最後得到

$$\begin{aligned}
u_r = \frac{a}{E} & \left[(1-\nu) a_0 \left(\frac{r}{a} \right) \right. \\
& + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \frac{1-3\nu}{4} \{ (a_1 + b'_1) \cos \theta + (b_1 - a'_1) \sin \theta \} \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^{n+1} \left(\frac{3-\nu}{2} \frac{1}{n+1} + \frac{1+\nu}{2} \right) \\
& \quad \cdot \{ (a_n + b'_n) \cos n\theta + (b_n - a'_n) \sin n\theta \} \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} \frac{1+\nu}{2} \left\{ \left(\frac{n}{n-1} a_n + \frac{n-2}{n-1} b'_n \right) \cos n\theta \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{n}{n-1} b_n - \frac{n-2}{n-1} a'_n \right) \sin n\theta \right\} \Bigg], \tag{12.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_\theta = -\frac{a}{E} & \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 \frac{5+\nu}{4} \{ (b_1 - a'_1) \cos \theta - (a_1 + b'_1) \sin \theta \} \right. \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^{n+1} \left(\frac{3-\nu}{2} \frac{1}{n+1} + \frac{1+\nu}{2} \right) \\
& \quad \cdot \{ (b_n - a'_n) \cos n\theta - (a_n + b'_n) \sin n\theta \} \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} \frac{1+\nu}{2} \left\{ \left(\frac{n}{n-1} a_n + \frac{n-2}{n-1} b'_n \right) \sin n\theta \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{n}{n-1} b_n - \frac{n-2}{n-1} a'_n \right) \cos n\theta \right\} \Bigg]. \tag{12.36}
\end{aligned}$$

[注1] 对于问题的解,只有在边界上满足条件(12.15)和(12.17)时才存在。条件(12.15)是表示边界上点的应力对原点的合力矩为零,即

$$\int_0^{2\pi} a \cdot \tau_{r\theta} a d\theta = 0. \quad (12.37)$$

而条件(12.17)是表示边界上点的合力在 x, y 轴上的分量各为零,即

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) a d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) a d\theta = 0. \quad (12.38)$$

[注2] 当 n 增大时,在应力和位移中与 a_n 和 b_n 相关的项,大致与 $\left(\frac{r}{a}\right)^n$ 成比例地变化。这就是说,当点由圆的边界向中心变动时, a_n, b_n 将按照这个比例逐渐减少。例如当 $\left(\frac{r}{a}\right)^n = 10^{-2}$ 时,即 $\ln\left(\frac{r}{a}\right) = (-2 \ln 10)/n = -4.6/n$, 亦即 $(a-r)a \approx 4.6/n$ 。由于边界上载荷的周期为 $2\pi a/n$, 若由边界变向内部,而变动的大小约为周期的七成左右时,则其影响仅及于百分之一。

[注3] 在边界上($r=a$)必有

$$\sigma_\theta = \sigma_r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (b'_n \cos n\theta - a'_n \sin n\theta), \quad (12.39)$$

根据(12.28)可知,右边的级数是下列级数

$$\tau_{r\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta) \quad (12.40)$$

的共轭级数。

例1 假设在边界上受垂直载荷 $\sigma_r = p(\theta)$ 的圆板,求其复应力函数,用 $p(\theta)$ 表示。

由于在边界上已知 $\sigma_r = p(\theta)$ 和 $\tau_{r\theta} = 0$, 因此(12.8)中的系数可求得为

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta, & a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) \cos n\theta d\theta, \\ b'_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (n \geq 1), \end{aligned} \right\} \quad (12.41)$$

以及 a'_n 和 b'_n 等于零。将它们代入(12.20)即得

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) \left\{ \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{na^{n-1}} e^{-i(n-1)\theta} \right\} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} p(\theta) \left[-\frac{a}{2\pi} e^{i\theta} \log \left(1 - \frac{z}{a} e^{-i\theta} \right) - \frac{z}{4\pi} \right] d\theta. \end{aligned} \quad (12.42)$$

同理由(12.21)得到

$$\psi(z) = \int_0^{2\pi} p(\theta) \left[\frac{a}{2\pi} z e^{-i\theta} \log \left(1 - \frac{z}{a} e^{-i\theta} \right) \right] d\theta. \quad (12.43)$$

例 2 在前例中，若仅在边界上 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 两点的近傍受有集中压力 P ，求在 z 軸上的应力状态(图 12.5)。

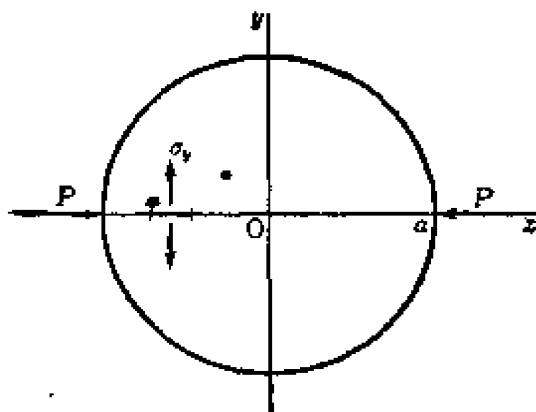


图 12.5

利用前例中的公式 (12.42), (12.43), 并取这样的 $p(\theta)$, 使在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 两点近傍积分 $\int p(\theta) \cdot a d\theta = -P$, 而在其他处为零, 即得

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{P}{a} \left[-\frac{a}{2\pi} \log \left(1 - \frac{z}{a} \right) - \frac{z}{4\pi} \right] + \left(-\frac{P}{a} \right) \left[+\frac{a}{2\pi} \log \left(1 + \frac{z}{a} \right) - \frac{z}{4\pi} \right] \\ &= -\frac{P}{a} \left[\frac{a}{2\pi} \left\{ \log \left(1 + \frac{z}{a} \right) - \log \left(1 - \frac{z}{a} \right) \right\} - \frac{z}{2\pi} \right], \end{aligned} \quad (12.44)$$

$$\psi(z) = \frac{P}{a} \left[\frac{a}{2\pi} z \left\{ \log \left(1 + \frac{z}{a} \right) - \log \left(1 - \frac{z}{a} \right) \right\} \right]. \quad (12.45)$$

因此

$$\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi a} \frac{2}{1 - \frac{z^2}{a^2}} + \frac{P}{2\pi a} = \frac{P}{2\pi a} \left[-2 / \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) + 1 \right], \quad (12.46)$$

$$\psi'(z) = \frac{P}{2\pi a} \left[a \left\{ \log \left(1 + \frac{z}{a} \right) - \log \left(1 - \frac{z}{a} \right) \right\} + 2z / \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right], \quad (12.47)$$

$$\varphi''(z) = -\frac{2P}{\pi a} \frac{z}{a^2} / \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right)^2, \quad (12.48)$$

$$\psi''(z) = \frac{P}{2\pi a} \left[4 / \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) + 4 \frac{z^2}{a^2} / \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right)^2 \right] = \frac{2P}{\pi a} / \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right)^2. \quad (12.49)$$

由于在 x 軸上 $z = \bar{z} = x$, 故有

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} = \operatorname{Re}[\varphi'(z)] = \frac{P}{2\pi a} \left[-2 / \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + 1 \right], \quad (12.50)$$

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{4} + i\tau_{xy} = \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) = \frac{2P}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (12.51)$$

于是

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi a} (\text{常数}), \quad \sigma_x = \frac{P}{\pi a} \left\{ 1 - 4 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (12.52)$$

在这里有趣的是 x 轴上的力 σ_y 具有均匀的拉力值 $P/\pi a$ 。利用这个事实，在钢筋混凝土的抗拉试验中，将圆柱形试件沿水平方向压缩，其拉应力 σ_y 的合力为 $\sigma_y \cdot 2a = (2/\pi)P$ ，与它平衡的压缩应力集中在直径两端的近傍（图 12.6，参照 § 15，例 1）。

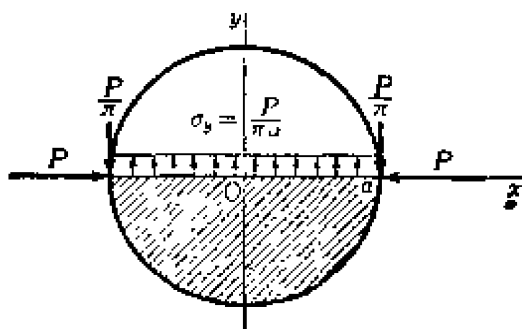


图 12.6

§ 13 圆环上的 Laurent 级数展开

本节将对半径为 a 和 b ($a > b$) 的同心圆所夹的圆环上的应力分布进行讨论。

取圆环的中心为直角坐标系 Oxy 的原点（图 13.1）。在圆环内的复应力函数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 都是 $z = x + iy$ 的多值解析函数。它们的多值性与

$$\varphi_1(z) = Lz \log z + M \log z, \quad (13.1)$$

$$\psi_1(z) = Nz \log z + K \log z \quad (13.2)$$

形式的多值性相同 (§ 8, 例 1)。其中 L 是实数, M, N, K 是复数, 其物理意义如 (8.21) 所示。因此 $\varphi(z) - \varphi_1(z)$, $\psi(z) - \psi_1(z)$ 在绕圆孔旋转一周时其值不变, 即它们都是单值函数。在圆环内单值正则函数都可展成 Laurent 级数, 所以复应力函数可展开成如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= Lz \log z + M \log z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n, \\ \psi(z) &= Nz \log z + K \log z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^n. \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

利用 (8.19) 可求出其位错的三个分量。如果圆环内位错等于零, 则

$$L=0, \quad (3-\nu)M + (1+\nu)\bar{N}=0. \quad (13.4)$$

下面再利用边界条件来决定 (13.3) 中的系数。将外周界 $z=ae^{i\theta}$ 上的外力 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ (图 13.1) 的已知边界条件展成如下级数 (参照 (12.9)):

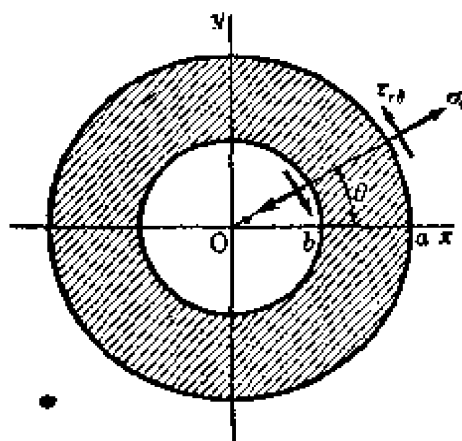


图 13.1

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n \cos n\theta + \bar{b}_n \sin n\theta). \quad (13.5)$$

同理, 将内周界 $z=be^{i\theta}$ 上外力 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ 的已知边界条件展成如下级数:

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \bar{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{c}_n \cos n\theta + \bar{d}_n \sin n\theta). \quad (13.6)$$

将边界条件 (13.5) 和 (13.6) 结合起来决定 (13.3) 中的系数。首先将 (13.3) 微分, 代入 (12.6), 再令 $z=ae^{i\theta}$, 然后与 (13.5) 比较 $e^{i\theta}$ 的同幂项, 则得下列各式:

$$2L(\log a + 1) + A_1 + \bar{A}_1 - L + K/a^2 = \bar{a}_0, \quad (13.7)$$

$$2A_2a + \bar{M}/a - 2A_2a - N/a = (\bar{a}_1 - i\bar{b}_1)/2, \quad (13.8)$$

$$\begin{aligned} (n+1)A_{n+1}a^n - (n-1)\bar{A}_{-n+1}a^{-n} \\ - (n+1)nA_{n+1}a^n - n(n-1)B_na^{n-2} \\ = (\bar{a}_n - i\bar{b}_n)/2 \quad (n \geq 2), \end{aligned} \quad (13.9)$$

$$M/a + 2\bar{A}_2a + M/a - 2B_{-1}a^{-1} = (\bar{a}_1 + i\bar{b}_1)/2, \quad (13.10)$$

$$\begin{aligned}
& - (n-1)A_{-n+1}a^{-n} + (n+1)\bar{A}_{n+1}a^n \\
& - (n-1)nA_{-n+1}a^{-n} - B_{-n}a^{-n-2} \\
& = (\bar{a}_n + i\bar{b}_n)/2 \quad (n \geq 2), \quad (13.11)
\end{aligned}$$

同理,利用内周界 $z=be^{i\theta}$ 上的边界条件即得到

$$2L(\log b + 1) + A_1 + \bar{A}_1 - L + K/b^2 = \bar{c}_0, \quad (13.12)$$

$$\bar{M}/b - N/b = (\bar{c}_1 - i\bar{d}_1)/2, \quad (13.13)$$

$$\begin{aligned}
& (n+1)A_{n+1}b^n - (n-1)\bar{A}_{-n+1}b^{-n} \\
& - (n+1)nA_{n+1}b^n - n(n-1)B_nb^{n-2} \\
& = (\bar{c}_n - i\bar{d}_n)/2 \quad (n \geq 2), \quad (13.14)
\end{aligned}$$

$$2M/b + 2\bar{A}_2b - 2B_{-1}b^{-3} = (\bar{c}_1 + i\bar{d}_1)/2, \quad (13.15)$$

$$\begin{aligned}
& - (n-1)A_{-n+1}b^{-n} + (n+1)\bar{A}_{n+1}b^n \\
& - (n-1)nA_{-n+1}b^{-n} - n(n+1)B_{-n}b^{-n-2} \\
& = (\bar{c}_n + i\bar{d}_n)/2 \quad (n \geq 2). \quad (13.16)
\end{aligned}$$

因此再将方程组(13.7)~(13.16)联立,即可求得系数。但在具体求解之前,必须考虑问题的边界条件是否满足三个解存在的条件,即载荷的合力及合力矩为零的条件(参照§12注1)。首先比较(13.7)和(13.12)的虚部,得

$$a'_0a^2 = c'_0b^2 (= -K'), \quad (13.17)$$

其次由(13.8)和(13.13),即得

$$(\bar{a}_1 - i\bar{b}_1)a = (\bar{c}_1 - i\bar{d}_1)b [= 2(\bar{M} - N)], \quad (13.18)$$

分解其实部与虚部,就有

$$(a'_1 - b'_1)a = (c'_1 - d'_1)b, \quad (a'_1 + b'_1)a = (c'_1 + d'_1)b. \quad (13.19)$$

将(13.17)与(13.19)结合起来,即得知解存在的三个条件被满足。

当在圆环内没有位错时,对(13.3)中的系数除了附加项的系数外,其余可由(13.4)及(13.7)~(13.16)决定。首先由(13.4)有 $L=0$, 所以由(13.7), (13.12)得到

$$A_1 = \frac{a^2a'_0 - b^2c'_0}{2(a^2 - b^2)}, \quad K = \frac{a^2b^2(c'_0 - a'_0)}{a^2 - b^2}, \quad (13.20)$$

K' 已经由 (13.17) 决定。其次由 (13.4) 第二式及 (13.18) 有

$$M = \frac{1+\nu}{8} a(a_3 + ib_3), \quad N = -\frac{3-\nu}{8} a(\bar{a}_1 - i\bar{b}_1). \quad (13.21)$$

将 M 的值代入 (13.10) 及 (13.15) 即得

$$A_3 = \frac{1}{2(a^4 - b^4)} \left\{ \left(\frac{a_1 - ib_1}{2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\bar{a}_1 - i\bar{b}_1}{2} \right) a^3 \right. \\ \left. - \left(\frac{c_1 - id_1}{2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\bar{a}_1 - i\bar{b}_1}{2} \frac{a}{b} \right) b^3 \right\}, \quad (13.22)$$

$$B_{-1} = \frac{a^3 b^3}{2(a^4 - b^4)} \left\{ \left(\frac{\bar{a}_1 + i\bar{b}_1}{2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{a_1 + ib_1}{2} \right) b \right. \\ \left. - \left(\frac{\bar{c}_1 + i\bar{d}_1}{2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{a_1 + ib_1}{2} \frac{a}{b} \right) a \right\}, \quad (13.23)$$

再将 (13.9), (13.14) 及 (13.11), (13.16) 的共轭式联立, 即得到对于 $n \geq 2$ 的所有系数

$$A_{n+1} = \frac{a^{-n}}{A_n} \left\{ \lambda^{2n-2} (1-\lambda^2) \frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2} + \frac{1-\lambda^{2n-2}}{n+1} \frac{a_n - ib_n}{2} \right. \\ \left. - \lambda^n (1-\lambda^2) \frac{\bar{c}_n - i\bar{d}_n}{2} - \frac{\lambda^{n+2} (1-\lambda^{2n-2})}{n+1} \frac{c_n - id_n}{2} \right\}, \quad (13.24)$$

$$A_{-n+1} = \frac{a^n}{A_n} \left\{ \frac{\lambda^{2n-2} (1-\lambda^{2n+2})}{n-1} \frac{a_n + ib_n}{2} + \lambda^{2n-2} (1-\lambda^2) \frac{\bar{a}_n + i\bar{b}_n}{2} \right. \\ \left. - \frac{\lambda^n (1-\lambda^{2n+2})}{n-1} \frac{c_n + id_n}{2} - \lambda^{2n} (1-\lambda^2) \frac{\bar{c}_n + i\bar{d}_n}{2} \right\}, \quad (13.25)$$

$$B_n = \frac{a^{-n+2}}{A_n} \left\{ -\frac{1+(n^2-1)\lambda^{2n}-n^2\lambda^{2n+2}}{n(n-1)} \frac{\bar{a}_n - i\bar{b}_n}{2} \right. \\ \left. - \frac{1-\lambda^{2n}}{n} \frac{a_n - ib_n}{2} + \frac{\lambda^n [n^2 - (n^2-1)\lambda^2 - \lambda^{2n+2}]}{n(n-1)} \frac{\bar{c}_n - i\bar{d}_n}{2} \right. \\ \left. + \frac{\lambda^{n+2} (1-\lambda^{2n})}{n} \frac{c_n - id_n}{2} \right\}, \quad (13.26)$$

$$B_{-n} = \frac{a^{n+2}}{\Delta_n} \left\{ -\frac{\lambda^{2n}(1-\lambda^{2n})}{n} \frac{a_n + ib_n}{2} - \frac{\lambda^{2n}[(n^2-1) - n^2\lambda^2 + \lambda^{2n}]}{n(n+1)} \frac{\bar{a}_n + i\bar{b}_n}{2} + \frac{\lambda^{n+2}(1-\lambda^{2n})}{n} \cdot \frac{c_n + id_n}{2} - \frac{\lambda^{n+2}[1 - n^2\lambda^{2n+2} + (n^2-1)\lambda^{2n}]}{n(n+1)} \frac{\bar{c}_n + i\bar{d}_n}{2} \right\}, \quad (13.27)$$

其中

$$\lambda = b/a, \quad \Delta_n = (1 - \lambda^{2n})^2 - n^2\lambda^{2n-2}(1 - \lambda^2)^2. \quad (13.28)$$

在(13.8)的系数中, 还有 A'_1, A_0, B_1, B_0 未被决定, 但它们可由复应力函数的标准化求得 (§ 7)。

例 1 设在圆环截面的柱体上受有外压力 p_1 和内压力 p_2 , 求其应力分布。

由于在外周界上, 已知 $\sigma_r = -p_1, \tau_{r\theta} = 0$; 在内周界上, 已知 $\sigma_r = -p_2, \tau_{r\theta} = 0$, 因此在公式(13.5), (13.6)中的系数有 $a_0 = -p_1, c_0 = -p_2$, 其他系数都为零。将它们代入(13.20)即得

$$A_1 = \frac{a^2(-p_1) - b^2(-p_2)}{2(a^2 - b^2)}, \quad K' = \frac{a^2b^2(p_1 - p_2)}{a^2 - b^2}. \quad (13.29)$$

同时得其他系数都为零。因此, 得到复应力函数为

$$\varphi(z) = -\frac{a^2p_1 - b^2p_2}{2(a^2 - b^2)}z, \quad \psi(z) = \frac{a^2b^2(p_1 - p_2)}{a^2 - b^2} \log z. \quad (13.30)$$

由此得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{a^2p_1 - b^2p_2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2b^2(p_1 - p_2)}{a^2 - b^2} \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_\theta &= -\frac{a^2p_1 - b^2p_2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2b^2(p_1 - p_2)}{a^2 - b^2} \frac{1}{r^2}, \quad \tau_{r\theta} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.31)$$

例 2 在例 1 中圆环的内周界受有均匀切向载荷 τ , 在外周界上受有与它维持平衡的切向力时, 求应力分布及内外圆周的相对位移。

由于在内周界上已知均匀外力 $\tau_{r\theta} = \tau$, 则

$$a'_0 = \tau b^2/a^2, \quad c'_0 = \tau, \quad K' = -\tau b^2, \quad \varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = -i\tau b^2 \log z, \\ (\sigma_r + \sigma_\theta)/4 = 0, \quad (\sigma_\theta - \sigma_r)/2 + i\tau_{r\theta} = e^{2i\theta}(i\tau b^2/z^2) = i\tau b^2/r^2.$$

所以

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = \tau b^2/r^2.$$

同时

$$u_r - i u_\theta = e^{i\theta} / 2G \cdot (i \tau b^2 / z) = i \tau b^2 / 2G r.$$

所以

$$u_r = 0, \quad u_\theta = -\tau b^2 / 2G r,$$

因此, 在外圆周的环向位移为 $[u_\theta]_{r=a} = -\tau b^2 / 2Ga$, 在内圆周的环向位移为 $[u_\theta]_{r=b} = -\tau b / 2G$. 于是在内外圆周的环向相对位移为

$$[u_\theta]_{r=b} - [u_\theta]_{r=a} = -(\tau / 2G)(a-b)b/a.$$

例 3 设一圆环具有旋轉型位錯 $[\tilde{\omega}]$ (13.2), 求其应力分布。

由 (8.21) 有 $L = b[\tilde{\omega}] / 8\pi$. 将此式代入 (13.7) 及 (13.12), 同时由题意有 $\bar{a}_0 = \bar{c}_0 = 0$, 即可求得 A_1 和 K , 其他的系数都为零。所以复应力函数决定如下:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{E[\tilde{\omega}]}{8\pi} \left\{ z \log z - \frac{(a^2 - b^2) + 2(a^2 \log a - b^2 \log b)}{2(a^2 - b^2)} z \right\}, \\ \psi(z) &= \frac{E[\tilde{\omega}]}{4\pi} \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \log \frac{a}{b} \right) \log z. \end{aligned} \right\} \quad (13.32)$$

由此, 可求得在圆环的切口上的合力为零, 合力矩为

$$M_0 = \frac{E}{8\pi} \left\{ \frac{a^2 - b^2}{2} - \frac{2a^2 b^2}{a^2 - b^2} \left(\log \frac{a}{b} \right)^2 \right\} [\tilde{\omega}], \quad (13.33)$$

此处 M_0 的符号是按照图 13.2 规定的。当圆环切开所張的中心角为 $\tilde{\omega}$ 的一个楔形, 要想将切口拉攏变成一个封閉的圆环时, 就必須在切口上作用一个合力矩为 M_0 .

例 4 求具有位移型位錯 $[\xi]$, $[\eta]$ 的圆环的复应力函数。

由 (8.21), (13.8), (13.10), (13.13), (13.15) 易得

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{E[\eta - i\xi]}{8\pi} \log z - \frac{E[\eta + i\xi]}{8\pi} \frac{z^2}{a^2 + b^2}, \\ \psi(z) &= \frac{E[\eta + i\xi]}{8\pi} z \log z + \frac{E[\eta - i\xi]}{8\pi} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{z}. \end{aligned} \right\} \quad (13.34)$$

因此可知作用在切口上的合力必通过中心, 且它的分量为

$$X = \frac{E}{4\pi} \left(\log \frac{a}{b} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) [\xi], \quad Y = \frac{E}{4\pi} \left(\log \frac{a}{b} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) [\eta], \quad (13.35)$$

此处 X, Y 的符号按图 13.3 规定的。

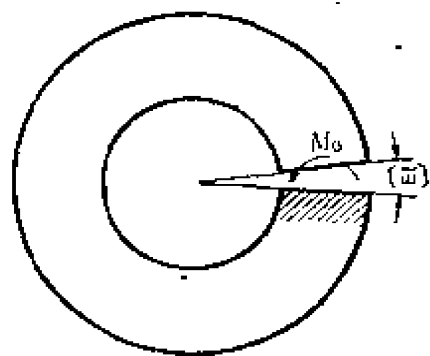


图 13.2

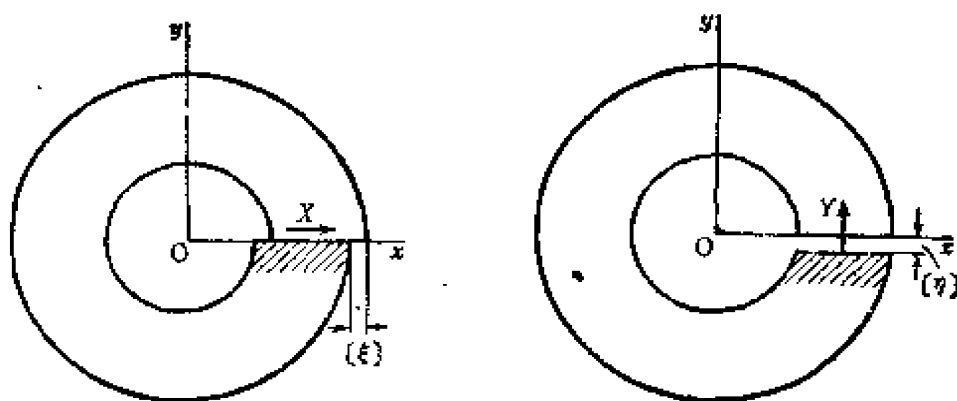


图 13.3

§ 14 圆孔及孤立奇点

对于带有一个半径为 b 的圆孔的无限平板，在圆孔上作用着法向载荷 σ_r 及切向载荷 $\tau_{r,\theta}$ 。假定在离开圆孔较远处的区域上几

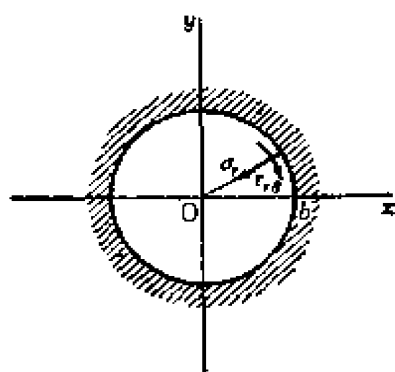


图 14.1

乎不产生应力[注 1]，则可利用 § 13 的结果，即有复应力函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的形如 (13.3) 的表达式。同时由于远处的应力相当地小，所以必有① $L=0$, $A_1=0$, $A_n=0$, $B_n=0$ ($n \geq 2$)。将它们代入 (13.3)，于是得到该问题的复应力函数的表达式：

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= M \log z + i A'_1 z + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} z^{-n}, \\ \psi(z) &= N z \log z + K \log z + B_1 z + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_{-n} z^{-n}. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

其中 A'_1 , A_0 , B_1 , B_0 与应力无关，而是由应力函数的标准化 (§ 7) 所决定，如果仅考虑问题的应力状态，则不妨取它们为零。其次 M , N 的项与合力及位错有关 (§ 8, 例 1)。

① 此处交代不够清楚，可参看穆斯海里什维里：《数学弹性力学的几个基本问题》一书。——校者注

在圓孔周界 $z = be^{i\theta}$ 上将已知外力的边界条件展成如下級数:

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \bar{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{c}_n \cos n\theta + \bar{d}_n \sin n\theta). \quad (14.2)$$

假設在圓孔周圍沒有位錯, 則由 (8.19) 有

$$(3-\nu)M + (1+\nu)\bar{N} = 0. \quad (14.3)$$

因此, 复应力函数变为

$$\varphi(z) = \frac{1+\nu}{8} (c_1 + id_1) b \log z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{n-1} \frac{c_n + id_n}{2} \frac{1}{z^{n-1}}, \quad (14.4)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & -\frac{3-\nu}{8} (\bar{c}_1 - i\bar{d}_1) bz \log z + \bar{c}_0 b^2 \log z \\ & + \frac{b^3}{2} \left(\frac{1+\nu}{2} \frac{c_1 + id_1}{2} - \frac{\bar{c}_1 + i\bar{d}_1}{2} \right) \frac{1}{z} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^{n+2}}{n} \left\{ \frac{c_n + id_n}{2} - \frac{\bar{c}_n + i\bar{d}_n}{2(n+1)} \right\} \frac{1}{z^n}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

[注 1] 无限平板实际上并不存在。所謂无限平板只不过是相对于有限平板的一个近似提法。例如前节中圆环区域的外周界半徑 a 很大时, 而同时只考虑內周界附近的情况, 就不妨取外半徑 $a \rightarrow \infty$ 的板限情形。这样可使公式簡化, 便于求解。由此所得結果告訴我們, 內周界所受載荷的影响随着远离內周界而逐渐减少。另一方面, 当比值 a/b 很大时, 在外周所受的載荷对內周界附近的影响很小。仅当逐渐接近外周界时, 其影响才显示出来。所以本节的假設是近似地与內周界附近的情形相符, 似乎沒有想象“无限”远情形的必要。

例 1 对于具有一个半徑为 b 的圓孔的无限平板, 在周界上一点作用着徑向集中压力 P , 求其复应力函数 (图 14.2)。

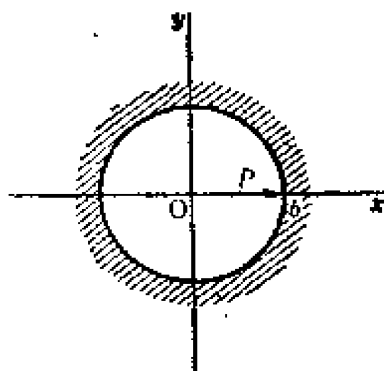


图 14.2

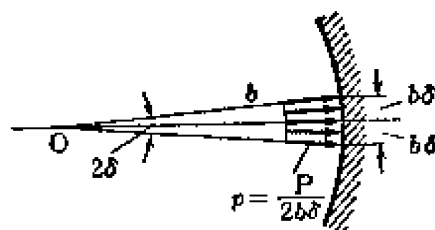


图 14.3

假设把集中压力 P 看作分布在中心角为 2δ (δ 是微小正数) 的范围内的均匀压力, 则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -P/2b\delta & 0 \leq |\theta| \leq \delta, \\ &= 0 & \delta < |\theta| \leq \pi, \\ \tau_{r\theta} &= 0 & 0 \leq |\theta| \leq \pi, \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

因此, (14.7) 的系数变为

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_r - i\tau_{r\theta}) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \frac{P}{b}, \\ \bar{c}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_r - i\tau_{r\theta}) \cos n\theta d\theta = -\frac{1}{\pi} \frac{P}{b\delta} \frac{\sin n\delta}{n} \approx -\frac{1}{\pi} \frac{P}{b}, \\ \bar{d}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_r - i\tau_{r\theta}) \sin n\theta d\theta = 0 \quad (n \geq 1), \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

将它们代入 (14.4), (14.5), 就得到

$$\varphi(z) = \frac{P}{\pi} \left\{ -\frac{3-\nu}{8} \log z - \frac{1}{2} \log(z-b) \right\}, \quad (14.8)$$

$$\psi(z) = \frac{P}{\pi} \left\{ -\frac{1+\nu}{8} z \log z - \frac{b}{2} \log z + \frac{z}{2} \log(z-b) + \frac{3-\nu}{8} \frac{b^2}{z} + \frac{b}{2} \right\}. \quad (14.9)$$

例2 具有半径为 b 的自由圆孔的无限平板, 在离开圆孔较远处有均匀应力状态, 求圆孔附近的应力分布 (图 14.4)。

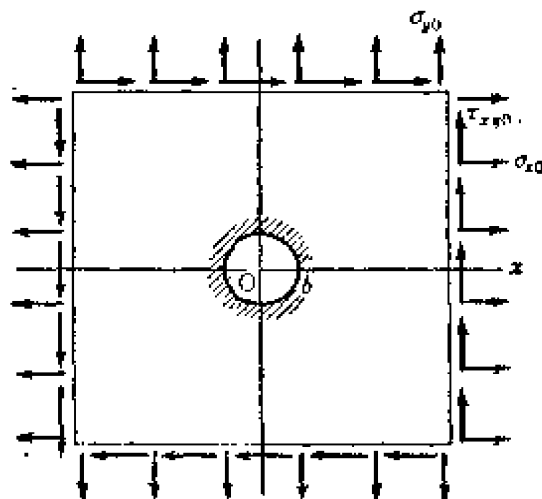


图 14.4

由 §6 例 1 可知, 表示远处的均匀应力状态的复应力函数为

$$\varphi_0(z) = Az, \quad \psi_0(z) = Bz^2, \quad (14.10)$$

其中, 系数 A 和 B 可由远处的均匀应力分量 σ_{x0} , σ_{y0} , τ_{xy0} 决定如下:

$$A = \frac{\sigma_{x0} + \sigma_{y0}}{4}, \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{y0} - \sigma_{x0}}{2} + i\tau_{xy0} \right). \quad (14.11)$$

假設圓孔周圍沒有位錯，則所要求的应力，應該以形如(14.1)中的函数分別加上上面的 $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ 作为它的复应力函数。这就是說，在(13.3)所表示的复应力函数式中令 $A_1 = A$, $A_n = 0$ ($n \geq 2$), $B_2 = B$, $B_n = 0$ ($n \geq 3$), 再使用无位錯的条件而得的結果。这样， M , N 就非滿足(14.3)不可。另一方面，利用在圓孔周界上 σ_r 及 $\tau_{r\theta}$ 为零的边界条件，由(14.2)可求得 \bar{c}_0 , \bar{c}_n , d_n ($n \geq 1$) 都为零。因此，再利用这些結果，即可决定系数如下：

$$\left. \begin{aligned} K' &= -2Ab^2, \quad M = N = 0, \quad A_{-1} = -2\bar{B}b^2, \quad A_{-n} = 0 \quad (n \geq 2), \\ B_{-1} &= 0, \quad B_{-2} = \bar{B}b^4, \quad B_{-n} = 0 \quad (n \geq 3). \end{aligned} \right\} \quad (14.12)$$

于是所求的复应力函数是

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= Az - 2\bar{B}b^2/z, \\ \psi(z) &= Bz^2 - 2Ab^2 \log z + \bar{B}b^4/z^2, \end{aligned} \right\} \quad (14.13)$$

其中 A , B 是由(14.11)决定的。

由此即得

$$\sigma_r = 2A \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \left(1 - 3 \frac{b^2}{r^2} \right) (2B' \cos 2\theta - 2B' \sin 2\theta), \quad (14.14)$$

$$\sigma_\theta = 2A \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) + \left(1 + 3 \frac{b^2}{r^2} \right) (2B' \cos 2\theta - 2B' \sin 2\theta), \quad (14.15)$$

$$\tau_{r\theta} = \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \left(1 + 3 \frac{b^2}{r^2} \right) (2B' \cos 2\theta + 2B' \sin 2\theta). \quad (14.16)$$

[注2] 应用反照原理，对这个問題求解更简单 (§ 23, 例1)。

对具有圓孔的大平板，在圓孔上受有載荷，如果只需要考虑圓孔附近情况的話，則可利用上述方法求解。但如果需要考虑离开圓孔稍远处的情況，則近似地将圓孔看作一个点，且設在該处有一个孤立点就可以了。当圓孔周圍有位錯时也是同样。假設不是圓孔，而是别的形状的孔，則在离孔稍远处与圓孔的情况差別不大。

这样，在上述意义下，就只要对具有一个孤立奇点的无限平板問題进行研究就够了。为此，取 $z=0$ 为孤立奇点，于是問題就是求在其附近的复应力函数。事实上，它和 § 13 的圓环情形完全一样，只是取内半徑 b 等于零，外半徑 a 趋向 ∞ 即可。然而在(13.3)

右边的 Laurent 級数中, 正幂部分是不影响在奇点的状态, 而它对离开奇点较远处的状态有影响。因此在奇点附近只要考虑奇点的主要部分

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= Lz \log z + M \log z + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} z^{-n}, \\ \psi(z) &= Nz \log z + K \log z + \sum_{n=1}^{\infty} B_{-n} z^{-n} \end{aligned} \right\} \quad (14.17)$$

即可。其中 L 是实数, 其余系数都是复数。

假设复应力函数的表达式(14.17)已知, 则原点周围的三个位错分量可由(8.19)求出, 同时, 在原点作用的外力 (X, Y) 及合力矩 M_0 可由(8.20)求出。

反之, 假设已知在原点周围的三个位错分量 $[\tilde{\omega}], [\xi], [\eta]$ 和作用在原点的外力 (X, Y) 及合力矩 M_0 , 则(14.17)中的 L, M, N 及 K' 都可由(8.21)决定。然后将(8.21)代入(14.17), 再把所得式子的开始几项分解, 就能得到一些有意义的结果。下面分别解释一下各个式子所表示的奇异性。

(1) 旋轉型位錯的中心:

$$\varphi(z) = \frac{E[\tilde{\omega}]}{8\pi} z \log z, \quad \psi(z) = 0. \quad (14.18)$$

(2) 位移型位錯的中心:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{E}{8\pi} [\eta - i\xi] \log z, \\ \psi(z) &= \frac{E}{8\pi} [\eta + i\xi] z \log z. \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

(3) 集中力的作用点:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1+\nu}{8\pi} (X + iY) \log z, \\ \psi(z) &= \frac{3-\nu}{8\pi} (X - iY) z \log z. \end{aligned} \right\} \quad (14.20)$$

(4) 膨脹的中心(參照(14.5)的 \tilde{c}_0 項):

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = K \cdot \log z. \quad (14.21)$$

(5) 集中力偶:

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = i \frac{M_0}{2\pi} \log z. \quad (14.22)$$

这样,在(14.17)中含有 $\log z$ 的项都得到了名称,至于 z 的负幂的项可统称之为“高阶奇性”。由(14.4)及(14.5)可知高阶奇性对原点附近的应力状态,起主要影响,而这些影响随着远离原点而急遽减小,但是高阶奇性和上列(1)~(5)的几种奇性比较起来是很小的,因此不予考虑。

§ 15 半无限板——第一种 Laplace 积分

所谓半无限板,就是在直线的一边无限伸展的区域,或者称为半无限平面。它也是用近似的概念来处理的一个弹性力学问题。事实上,在仅需考虑直线边附近的局部状态,且对离开较远处影响可以忽略不计的情形就能使用这个概念。首先把较远处的应力与位移都假设为零。如取直线边为 y 轴,板所存在的一方为 x 轴的正向(图 15.1),则 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 可表示为如下的积分(第一种 Laplace 积分):

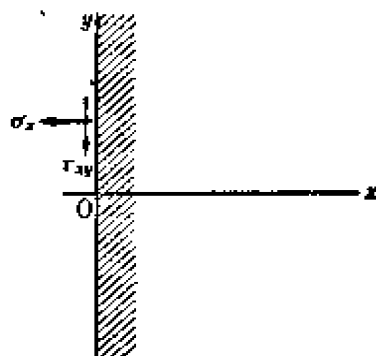


图 15.1

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} A(t) dt, \quad \psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} B(t) dt, \quad (15.1)$$

其中 $A(t)$, $B(t)$ 是实变数 t (变域由 0 到 ∞) 的复函数。

因此,应力可由下式求出:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} = \operatorname{Re}[\varphi'(z)] = \operatorname{Re}\left[-\int_0^{\infty} e^{-zt} t A(t) dt\right], \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy} &= \bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-zt} \{\bar{z}t^2 A(t) + t^2 B(t)\} dt. \end{aligned} \quad (15.3)$$

特別在直綫边 $z=iy$ 上的 σ_x 及 τ_{xy} , 由

$$\begin{aligned} [\sigma_x - i\tau_{xy}]_{x=0} = & - \int_0^\infty e^{-iyt} t A(t) dt - \int_0^\infty e^{iyt} t \overline{A(t)} dt \\ & - \int_0^\infty e^{-iyt} \{ -iyt^2 A(t) + t^2 B(t) \} dt \end{aligned} \quad (15.4)$$

所决定。对于右边积分中含有 $e^{-iyt}(-iy)$ 的項施行分部积分, 即得

$$\int_0^\infty e^{-iyt} \{ -iyt^2 A(t) \} dt = \left[e^{-iyt} t^2 A(t) \right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-iyt} \frac{d}{dt} \{ t^2 A(t) \} dt \quad (15.5)$$

又因右边第一項为零, 于是(15.4)变为

$$\begin{aligned} [\sigma_x - i\tau_{xy}]_{x=0} = & - \int_0^\infty e^{iyt} t \overline{A(t)} dt - \int_0^\infty e^{-iyt} \left[t A(t) \right. \\ & \left. - \frac{d}{dt} \{ t^2 A(t) \} + t^2 B(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (15.6)$$

另外, 假设已知直綫边上的垂直外力和切向外力的边界条件。将它们分別展为如下 Fourier 积分:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_x]_{x=0} &= \int_0^\infty \{ a(t) \cos ty + b(t) \sin ty \} dt, \\ [\tau_{xy}]_{x=0} &= \int_0^\infty \{ a(t)' \cos ty + b(t)' \sin ty \} dt. \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

因此

$$\begin{aligned} [\sigma_x - i\tau_{xy}]_{x=0} &= \int_0^\infty \{ \overline{a(t)} \cos ty + \overline{b(t)} \sin ty \} dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\overline{a(t)} - i\overline{b(t)}}{2} e^{ity} + \frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2} e^{-ity} \right\} dt. \end{aligned} \quad (15.8)$$

再与(15.6)比較, 可知有

$$\left. \begin{aligned} -t\overline{A(t)} &= \frac{1}{2} \{ \overline{a(t)} - i\overline{b(t)} \}, \\ -tA(t) + \frac{d}{dt} \{ t^2 A(t) \} - t^2 B(t) &= \frac{1}{2} \{ \overline{a(t)} + i\overline{b(t)} \}. \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

由此得

$$A(t) = -\frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2t}, \quad (15.10)$$

$$\begin{aligned} B(t) &= -\frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2t^2} + \frac{1}{t^2} \frac{d}{dt} \{t^2 A(t)\} - \frac{1}{t} A(t) \\ &= -\frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2t^3} - \frac{1}{2t} \frac{d}{dt} \{a(t) + ib(t)\}. \end{aligned} \quad (15.11)$$

将此代入 (15.1), 即得

$$\varphi(z) = -\int_0^\infty e^{-zt} \frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2t} dt, \quad (15.12)$$

$$\psi(z) = -\int_0^\infty e^{-zt} \left[\frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2t^2} + \frac{1}{2t} \frac{d}{dt} \{a(t) + ib(t)\} \right] dt. \quad (15.13)$$

因此得到了复应力函数的一般表达式。但这些积分可能在下限 $t=0$ 处发散, 为了使积分 (15.12) 在下限处不发散, 必须有

$$a(0) + ib(0) = 0. \quad (15.14)$$

另外, 由于 $\psi(z)$ 没有直接的物理意义, 所以 (15.13) 的发散与否不太重要, 但虽然如此, 若

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \left[\frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2t} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{a(t) + ib(t)\} \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ \frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2t} + \frac{a(t) + ib(t)}{2} \right\} dt \end{aligned} \quad (15.15)$$

发散那就麻烦了。为了使它在下限处不发散, 必须有

$$\overline{a(0)} + i\overline{b(0)} = 0. \quad (15.16)$$

将 (15.14) 与 (15.16) 联立, 即得

$$a(0) = b(0) = 0. \quad (15.17)$$

由于

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_x + i\tau_{xy}]_{x=0} \cos ty \, dy, \\ b(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_x + i\tau_{xy}]_{x=0} \sin ty \, dy, \end{aligned} \right\} \quad (15.18)$$

利用 $a(0) = 0$, 从上式得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy} dy = 0. \quad (15.19)$$

这说明了当 $a(0) = 0$ 时, 在直线边上的载荷的合力必须为零。同时 $b(0) = 0$ 恒成立。

若 (15.19) 不成立, 设

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_x + i\tau_{xy}]_{x=0} dy = -X - iY, \quad (15.20)$$

则有

$$a(0) = -\frac{1}{\pi} (X + iY). \quad (15.21)$$

此处 (X, Y) 是作用在直线边的载荷的合力。

对于这种情形, 有

$$\varphi'(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{a(t) + i b(t)}{2} dt, \quad (15.22)$$

$$\psi''(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \left\{ -\frac{\overline{a(t) + i b(t)}}{2} + \frac{a(t) + i b(t)}{2} - zt \frac{a(t) + i b(t)}{2} \right\} dt, \quad (15.23)$$

现在说明这两个积分对于下限不发散。首先将它们分别加减相同的一个积分项, 即有

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{a(t) - a(0) + i b(t)}{2} dt + \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{a(0)}{2} dt \\ &= \frac{a(0)}{2} \frac{1}{z} + \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{a(t) - a(0) + i b(t)}{2} dt, \end{aligned} \quad (15.24)$$

$$\begin{aligned} \psi''(z) &= -\frac{\overline{a(0)}}{2} \frac{1}{z} + \int_0^{\infty} e^{-zt} \left\{ -\frac{\overline{a(t) - a(0) + i b(t)}}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a(t) + i b(t)}{2} - zt \frac{a(t) + i b(t)}{2} \right\} dt. \end{aligned} \quad (15.25)$$

再将它们积分, 就得到

$$\varphi(z) = \frac{a(0)}{2} \log z - \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{a(t) - a(0) + i b(t)}{2t} dt, \quad (15.26)$$

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= -\frac{\overline{a(0)}}{2} \log z \\ &\quad + \int_0^{\infty} e^{-zt} \left\{ \frac{\overline{a(t) - a(0) + i b(t)}}{2t} + z \frac{a(t) + i b(t)}{2} \right\} dt. \end{aligned} \quad (15.27)$$

这就说明了积分在下限不发散。

位移的表达式可求得如下:

$$\begin{aligned}
u - iv &= \frac{3-\nu}{E} \overline{\varphi(z)} - \frac{1+\nu}{E} \{z\varphi'(z) + \psi'(z)\} \\
&= \frac{3-\nu}{E} \left\{ \frac{\overline{a(0)}}{2} \log \bar{z} - \int_0^\infty e^{-\bar{z}t} \frac{\overline{a(t)} - \overline{a(0)} - i\overline{b(t)}}{2t} dt \right\} \\
&\quad - \frac{1+\nu}{E} \left[\bar{z} \left\{ \frac{a(0)}{2} \frac{1}{z} + \int_0^\infty e^{-zt} \frac{a(t) - a(0) + i b(t)}{2} dt \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\overline{a(0)}}{2} \log z + \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ \frac{\overline{a(t)} - \overline{a(0)} + i\overline{b(t)}}{2t} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + z \frac{a(t) + i b(t)}{2} \right\} dt \right]. \quad (15.28)
\end{aligned}$$

特别在直线边 $z=iy$ 上, 有

$$\begin{aligned}
[u - iv]_{x=0} &= \frac{3-\nu}{E} \left\{ \frac{\overline{a(0)}}{2} \log(-iy) - \int_0^\infty e^{iyt} \frac{\overline{a(t)} - \overline{a(0)} - i\overline{b(t)}}{2t} dt \right\} \\
&\quad - \frac{1+\nu}{E} \left[-\frac{a(0)}{2} + (-iy) \int_0^\infty e^{-iyt} \frac{a(t) - a(0) + i b(t)}{2} dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{\overline{a(0)}}{2} \log(iy) + \int_0^\infty e^{-iyt} \left\{ \frac{\overline{a(t)} - \overline{a(0)} + i\overline{b(t)}}{2t} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + iy \frac{a(t) + i b(t)}{2} \right\} dt \right] \\
&= \frac{2}{E} \overline{a(0)} \log|y| - \frac{1-\nu}{E} \overline{a(0)} \pi i \operatorname{sgn} y \\
&\quad - \frac{2}{E} \int_0^\infty \frac{\{\overline{a(t)} - \overline{a(0)}\} \cos yt + \overline{b(t)} \sin yt}{t} dt \\
&\quad + i \frac{1-\nu}{E} \int_0^\infty \frac{\overline{b(t)} \cos yt - \{\overline{a(t)} - \overline{a(0)}\} \sin yt}{t} dt. \quad (15.29)
\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{sgn} y$ 表示当 y 为正时它为 $+1$, y 为负时它为 -1 , y 为零时它也为零。

例 1 在直线边上宽度为 $2c$ 的范围内, 受有图 15.2 所示的均匀压力 p , 求 x 轴上的应力分布。

在直线边 $x=0$ 上, 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p & -c < y < c, \\ &= 0 & \text{其他,} \\ \tau_{xy} &= 0 & -\infty < y < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (15.30)$$

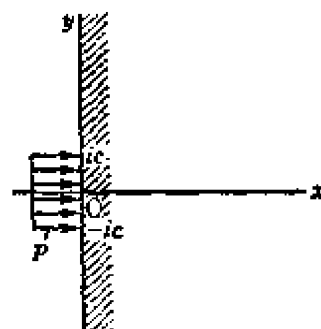


图 15.2

由此, (15.18) 变为

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c (-p) \cos ty \, dy = -\frac{2p}{\pi} \frac{\sin ct}{t}, \\ b(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c (-p) \sin ty \, dy = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

因此

$$a(0) = -\frac{2pc}{\pi}, \quad (15.32)$$

于是 (15.22), (15.23) 变成

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \left(-\frac{p}{\pi} \frac{\sin ct}{t} \right) dt = -\frac{ip}{2\pi} \log \frac{z-ic}{z+ic} \\ &= -\frac{p}{\pi} \operatorname{arctan} \frac{c}{z}, \end{aligned} \quad (15.33)$$

$$\psi''(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{pz}{\pi} \sin ct \, dt = \frac{p}{\pi} \frac{cz}{z^2+c^2}. \quad (15.34)$$

由此可求得在 x 轴上的应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2p}{\pi} \operatorname{arctan} \frac{c}{x} - \frac{2pcx}{\pi(x^2+c^2)}, \\ \sigma_y &= -\frac{2p}{\pi} \operatorname{arctan} \frac{c}{x} + \frac{2pcx}{\pi(x^2+c^2)}, \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.35)$$

若将此结果用图表示出来, 则得图 15.3。

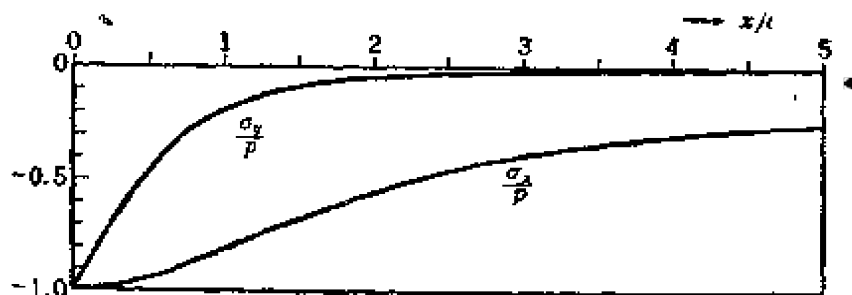


图 15.3

这样的分析一般在自由边上作用着集中载荷时, 作为稍微详细地研究载荷点近傍的情况的典范是有意义的。特别是 x 轴上的 σ_y 到处为负的, 其合力为 $-P/\pi$ (参照 § 12, 例 2)。

例 2 在前例, $P=2pc$ 保持一定, 求 c 趋近于零的极限。

由 (15.33), (15.34) 取极限, 则得

$$\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad \psi''(z) = \frac{P}{2\pi} \frac{1}{z}. \quad (15.36)$$

§ 16 带状板——第二种 Laplace 积分

“无限长的带状板”这个概念，是对于相当长矩形板的实际问题的一种近似提法。当它受局部载荷时，不考虑其对较远处的影响。

取一个直线边为 y 轴，即 $x=0$ ，另一个直线边为直线 $x=a$ (a 是板宽)。复应力函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 在该带状区域内是单值正则的，在离开受局部载荷较远处非常快地变为零，因此，可表示为第二种 Laplace 积分的形式：

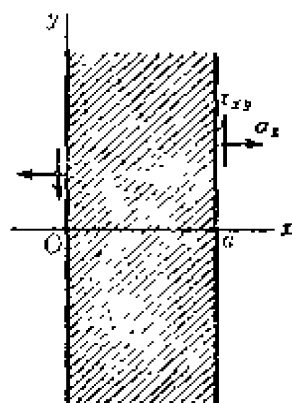


图 16.1

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} A(t) dt, \quad \psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} B(t) dt, \quad (16.1)$$

其中 $A(t)$ 及 $B(t)$ 一般为复数值。

可用与 (15.2), (15.3) 同样的方法求出对应于这种情况的应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma_x - i\tau_{xy} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - \{z\varphi''(z) + \psi''(z)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} \{-tA(t) - \bar{z}t^2 A(t) - t^2 B(t)\} dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\bar{z}t} \{-t\overline{A(t)}\} dt. \end{aligned} \quad (16.2)$$

在此，对直线边 $x=0$ 及 $x=a$ 上的载荷 σ_x 及 τ_{xy} ，可展成如下表达式：

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_x - i\tau_{xy}]_{x=0} &= \int_0^{\infty} \{\overline{a(t)} \cos yt + \overline{b(t)} \sin yt\} dt, \\ [\sigma_x - i\tau_{xy}]_{x=a} &= \int_0^{\infty} \{\overline{c(t)} \cos yt + \overline{d(t)} \sin yt\} dt. \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

于是用 (16.2) 与 (16.3)，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} \{-tA(t) + iyt^2 A(t) - t^2 B(t)\} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} \{-t\overline{A(t)}\} dt \\ = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\overline{a(t)} - i\overline{b(t)}}{2} e^{iyt} + \frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2} e^{-iyt} \right\} dt, \quad (16.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+iy)t} \{-tA(t) - (a-iy)t^2 A(t) - t^2 B(t)\} dt \\ + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a-iy)t} \{-t\overline{A(t)}\} dt \\ = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\overline{c(t)} - i\overline{d(t)}}{2} e^{iyt} + \frac{\overline{c(t)} + i\overline{d(t)}}{2} e^{-iyt} \right\} dt. \quad (16.5)$$

将(16.4), (16.5)①左边含 iy 的项, 利用与(15.5)同样的分部积分法改变形式后, 将 $t < 0$ 的部分用 $-t$ 代替 t 而作变换, 再将积分用下限为零、上限为 ∞ 表示, 然后分别比较 e^{iyt} 及 e^{-iyt} 的系数, 则得到

$$-t \frac{d}{dt} \{tA(-t)\} - t^2 B(t) - t\overline{A(t)} = \frac{\overline{a(t)} - i\overline{b(t)}}{2}, \quad (16.6)$$

$$t \frac{d}{dt} \{tA(t)\} - t^2 B(t) + t\overline{A(-t)} = \frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2}, \quad (16.7)$$

$$e^{at} \left[-2at^2 A(-t) - t \frac{d}{dt} \{tA(-t)\} - t^2 B(-t) \right] - e^{-at} t\overline{A(t)} \\ = \frac{\overline{c(t)} - i\overline{d(t)}}{2}, \quad (16.8)$$

$$e^{-at} \left[-2at^2 A(t) + t \frac{d}{dt} \{tA(t)\} - t^2 B(t) \right] + e^{at} t\overline{A(-t)} \\ = \frac{\overline{c(t)} + i\overline{d(t)}}{2}. \quad (16.9)$$

利用该方程组, 将 $A(t)$, $\overline{A(-t)}$, $B(t)$, $\overline{B(-t)}$ 解出, 再代入(16.1), 即得

① 原书误为(16.6), (16.7)。——校者注

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = & \int_0^\infty e^{-zt} \frac{1}{t\Delta(t)} \left\{ (1 - e^{2at}) \frac{a(t) + ib(t)}{2} \right. \\
& + 2at \frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2} + (1 - e^{2at})e^{-at} \frac{c(t) + id(t)}{2} \\
& \left. - 2ate^{at} \frac{\overline{c(t)} + i\overline{d(t)}}{2} \right\} dt \\
& + \int_0^\infty e^{zt} \frac{1}{t\Delta(t)} \left\{ 2at \frac{\overline{a(t)} - i\overline{b(t)}}{2} \right. \\
& + (1 - e^{-2at}) \frac{a(t) - ib(t)}{2} - 2ate^{-at} \frac{\overline{c(t)} - i\overline{d(t)}}{2} \\
& \left. - (1 - e^{-2at})e^{at} \frac{c(t) - id(t)}{2} \right\} dt, \quad (16.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(z) = & \int_0^\infty e^{-zt} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \{t\Delta(t)\} dt + \int_0^\infty e^{zt} \frac{-1}{t} \frac{d}{dt} \{t\Delta(-t)\} dt \\
& + \int_0^\infty e^{-zt} \frac{1}{t^2\Delta(t)} \left\{ 2at \frac{a(t) + ib(t)}{2} \right. \\
& - (1 - e^{2at} + 4a^2t^2) \frac{\overline{a(t)} + i\overline{b(t)}}{2} \\
& - 2ate^{-at} \frac{c(t) + id(t)}{2} \\
& \left. - (1 - e^{-2at})e^{at} \frac{\overline{c(t)} + i\overline{d(t)}}{2} \right\} dt \\
& + \int_0^\infty e^{zt} \frac{1}{t^2\Delta(t)} \left\{ -(1 - e^{-2at} + 4a^2t^2) \frac{\overline{a(t)} - i\overline{b(t)}}{2} \right. \\
& - 2at \frac{a(t) - ib(t)}{2} - (1 - e^{2at})e^{-at} \frac{\overline{c(t)} - i\overline{d(t)}}{2} \\
& \left. + 2ate^{at} \frac{c(t) - id(t)}{2} \right\} dt. \quad (16.11)
\end{aligned}$$

其中

$$\Delta(t) = (1 - e^{2at})(1 - e^{-2at}) + 4a^2t^2 = -4(\sinh^2 at - a^2t^2). \quad (16.12)$$

将(16.11)对 z 微分后,再用分部积分法,则得

$$\begin{aligned} \psi'(z) = & -z \int_0^\infty e^{-zt} t A(t) dt + z \int_0^\infty e^{zt} t A(-t) dt \\ & + \int_0^\infty e^{-zt} \frac{1}{t \Delta(t)} \left\{ -2at \frac{a(t) + i b(t)}{2} \right. \\ & + (1 - e^{2at} + 4a^2t^2) \frac{\overline{a(t)} + i \overline{b(t)}}{2} \\ & + 2ate^{-at} \frac{c(t) + i d(t)}{2} \\ & \left. + (1 - e^{-2at}) e^{at} \frac{\overline{c(t)} + i \overline{d(t)}}{2} \right\} dt \\ & + \int_0^\infty e^{zt} \frac{1}{t \Delta(t)} \left\{ - (1 - e^{-2at} + 4a^2t^2) \frac{\overline{a(t)} - i \overline{b(t)}}{2} \right. \\ & - 2at \frac{a(t) - i b(t)}{2} - (1 - e^{2at}) e^{-at} \frac{\overline{c(t)} - i \overline{d(t)}}{2} \\ & \left. + 2ate^{at} \frac{c(t) - i d(t)}{2} \right\} dt, \end{aligned} \quad (16.13)$$

但右边最初的部分很容易看出等于 $z\varphi'(z)$ 。

为了使(16.10)及(16.13)的积分在 $t=0$ 处不发散,必须和前节同样使载荷满足几个条件。我们虽不拟作详细讨论,但必须指出,

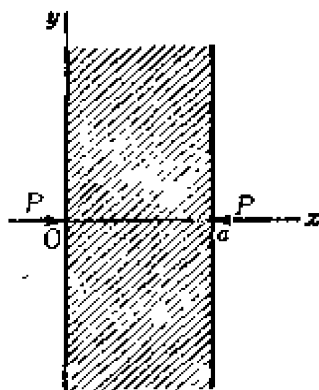


图 16.2

若载荷不是分布得很远,而且构成一个平衡力系,那就可以不必顾虑。在相反的情况下,就必须象(15.26), (15.27)那样再作讨论。

例 若在带状板两侧的直线边上,作用着如图16.2所示的相对集中压力 P , 求其应力分布情况。

设想力 P 是按照图15.2那样,在宽度 $2c$ 之间均匀分布(其密度 $p=P/2c$)的,实际计算之,与(15.31)相仿,得到

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= c(t) = -\frac{2p}{\pi} \frac{\sin ct}{t}, \\ b(t) &= d(t) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

将这些值代入(16.10), 则有

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \frac{1}{t\Delta(t)} \left\{ -(1-e^{2at}) \frac{1-e^{-at}}{2} + 2at \frac{1-e^{at}}{2} \right\} \frac{-2p}{\pi} \frac{\sin ct}{t} dt \\ &\quad + \int_0^\infty e^{zt} \frac{1}{t\Delta(t)} \left\{ 2at \frac{1-e^{-at}}{2} + (1-e^{-2at}) \frac{1-e^{at}}{2} \right\} \\ &\quad \cdot \frac{-2p}{\pi} \frac{\sin ct}{t} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\sinh \frac{at}{2} \sinh \left\{ \left(z - \frac{a}{2} \right) t \right\}}{t(\sinh at + at)} \frac{-2p}{\pi} \frac{\sin ct}{t} dt. \end{aligned} \quad (16.15)$$

再代入(16.13), 则得

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= z\varphi'(z) + \int_0^\infty e^{-zt} \frac{1}{t\Delta(t)} \left\{ -2at(1-e^{-at}) + 4a^2t^2 \right. \\ &\quad \left. + (1-e^{ct})(e^{at}-e^{-at}) \right\} \frac{-p}{\pi} \frac{\sin ct}{t} dt \\ &\quad + \int_0^\infty e^{zt} \frac{1}{t\Delta(t)} \left\{ 2at(e^{2t}-1) - 4a^2t^2 \right. \\ &\quad \left. - (e^{at}-e^{-at})(e^{-at}-1) \right\} \frac{-p}{\pi} \frac{\sin ct}{t} dt \\ &= z\varphi'(z) + \int_0^\infty \frac{\sinh \frac{at}{2} \sinh \left\{ \left(z - \frac{a}{2} \right) t \right\} + at \sinh zt}{t(\sinh at + at)} \frac{2p}{\pi} \frac{\sin ct}{t} dt. \end{aligned} \quad (16.16)$$

在此, 使 $c \rightarrow 0$, 则有

$$\frac{2p}{\pi} \frac{\sin ct}{t} \rightarrow \frac{P}{\pi}, \quad (16.17)$$

将(16.17)代入(16.15), (16.16)可以化简些。特别可求得 x 轴上的 σ_y :

$$\begin{aligned} [\sigma_y]_{y=0} &= \frac{2P}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sinh at + at} \left[\left(\frac{at}{2} \cosh \frac{at}{2} - \sinh \frac{at}{2} \right) \cosh \left\{ \left(x - \frac{a}{2} \right) t \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left(x - \frac{a}{2} \right) t \sinh \frac{at}{2} \sinh \left\{ \left(x - \frac{a}{2} \right) t \right\} \right] dt. \end{aligned} \quad (16.18)$$

[注1] 在上例中, 问题具有对称性, 这时可取对称轴为坐标轴, 如图 16.3, 因此可取复应力函数为

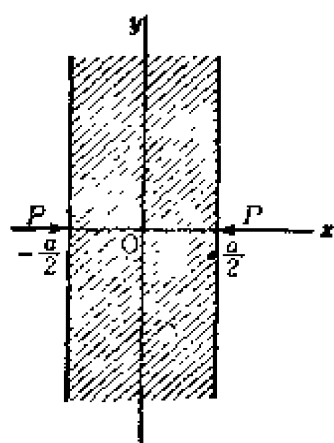


图 16.3

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \int_0^{\infty} A(t) \sinh zt \, dt, \\ \psi(z) &= \int_0^{\infty} B(t) \cosh zt \, dt, \end{aligned} \right\} \quad (16.19)$$

这样, 计算就简单得多了(参照 §9 的例 4, 5)。

[注 2] 在求(16.18) 的值时必须作数值积分。此时, 当 x 接近零及 a 时积分在上限处收敛得很慢。若考虑范围 $x < a/2$, 并利用当 $t \rightarrow \infty$ 时下列的近似关系

$$\sinh at + at \approx e^{at}/2,$$

$$\cosh (at/2) \approx e^{at/2}/2,$$

$$\sinh (at/2) \approx e^{at/2}/2, \quad \cosh \{(x - a/2)t\} \approx e^{(a/2 - x)t}/2,$$

$$\sinh \{(x - a/2)t\} \approx -e^{(a/2 - x)t}/2,$$

将被积函数中所出现的那些函数予以更换, 就可了解被积函数的趋势等于 $(xt - 1)e^{-xt}/2$ 。而从(16.18) 的被积函数中减去这个部分: 然后再对余项作数值积分, 它将收敛得很快。同时这个趋势所表示的部分本身的积分应该等于零。这样计算后就得到图 16.3 的结果。 σ_y 在范围 $0 < x < a$ 内恒为正, 而与该合力 $2P/x$ 恰好平衡的压力集中作用在 $x=0$ 及 $x=a$ 两点上(参照图 12.6)。关于这点, Seewald [Abh. Aerodyn. Inst. Aachen, 7 (1927)] 所得出的图是错误的。

[注 3] 若带状板的宽度 a 比载荷分布范围大得多时, 就可按半无限板来处理。反之, 若载荷的分布范围与板的宽度 a 相差不大, 那末就可适用初等材料力学内梁的理论了。[田部貞夫: 东大应数, 昭和 22 年毕业论文]

第4章 复参数的应用^①

§ 17 曲线坐标与共形映照

和其他平面问题一样,在平面弹性理论中也广泛地应用“曲线坐标”,但这里用的差不多全部都是等尺度的直交曲线坐标。也就是说,坐标面和物理面间都是用共形映照的关系相互连结起来的。若设物理面上的复数坐标是 $z = x + iy$, 坐标面上的复数坐标 (即复参数) 是 $\zeta = \xi + i\eta$, 则两者通常用如下的关系式:

$$z = Z(\zeta) \quad (17.1)$$

联系着。此处, $Z(\zeta)$ 是 ζ 的解析函数。

对 (17.1) 微分, 得

$$dz = Z'(\zeta) d\zeta. \quad (17.2)$$

也就是说,物理面上的线元素 dz 等于对应坐标面上点 ζ 的线元素 $d\zeta$ 乘以 $Z'(\zeta)$ 。记 $Z'(\zeta)$ 的绝对值为 J , 偏角为 ϕ , 因此可将 $Z'(\zeta)$ 表示如下:

$$Z'(\zeta) = J e^{i\phi}. \quad (17.3)$$

于是我们容易看出, z 面的线元素 dz 的长度等于对应 ζ 面的线元素 $d\zeta$ 的 J 倍, 而偏角仅增加了 ϕ (图 17.1)。 J 和 ϕ 是点的函数, 但对于同一点的所有线元素却是相同的。因此 z 面上微小图形与对应的 ζ 面上的图形形状相似而尺寸放大 (或缩小) J 倍, 同时旋转了一个角度 ϕ (图 17.2)。

设弹性体在物理面上的区域为 (D) , 在 ζ 面上和它对应的区

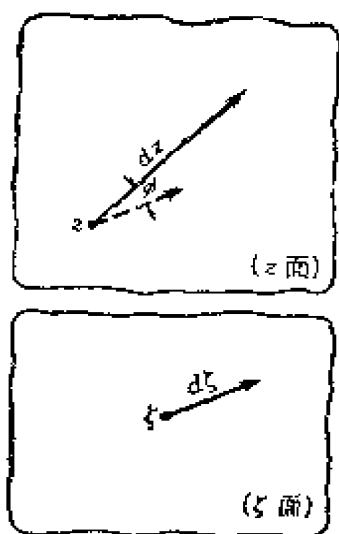


图 17.1

① 根据本章内容,似应为“共形映照的应用”。——校者注

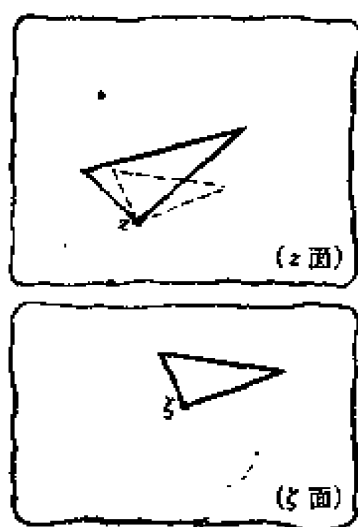


图 17.2

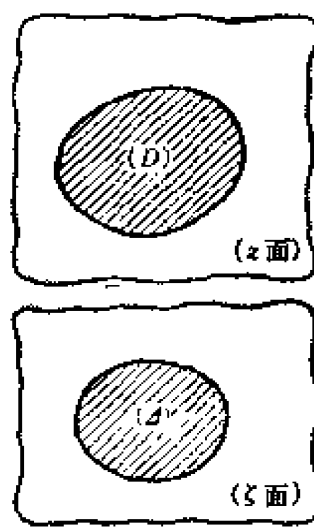


图 17.3

域为 (Δ) (图 17.3)。复应力函数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 在区域 (D) 内所有点正则。将它们看作 ζ 的函数, 则它们对于区域 (Δ) 内所有点也都正则。用大写字母表示它们如下:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \varphi(Z(\zeta)), \\ \Psi(\zeta) &= \psi(Z(\zeta)). \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

今后若将 $\varphi'(z)$ 及 $\varphi''(z)$ 都看作 ζ 的函数时, 就分别表示为 $\Phi^I(\zeta)$ 及 $\Phi^{II}(\zeta)$ 等, 即

$$\left. \begin{aligned} \Phi^I(\zeta) &= \varphi'(Z(\zeta)), & \Phi^{II}(\zeta) &= \varphi''(Z(\zeta)); \\ \Psi^I(\zeta) &= \psi'(Z(\zeta)), & \Psi^{II}(\zeta) &= \psi''(Z(\zeta)). \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

以后, 在无特别标明的必要时, 将略去参数 ζ . 又 $\Phi(\zeta)$ 及 $Z(\zeta)$ 关于 ζ 的微分用 “'” 表示, 因此

$$\left. \begin{aligned} \Phi'(\zeta) &= \varphi'(Z(\zeta)) \cdot Z'(\zeta) = \Phi^I(\zeta) \cdot Z'(\zeta), \\ \Phi''(\zeta) &= \varphi''(Z(\zeta)) \cdot \{Z'(\zeta)\}^2 + \varphi'(Z(\zeta)) \cdot Z''(\zeta) \\ &= \Phi^{II}(\zeta) \{Z'(\zeta)\}^2 + \Phi^I(\zeta) \cdot Z''(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (17.6)$$

从而

$$\Phi^I = \Phi' / Z', \quad \Phi^{II} = \Phi'' / Z'^2 - \Phi' Z'' / Z'^3. \quad (17.7)$$

对于 Ψ^I, Ψ^{II} 也成立同样的公式。

在物理面上 z 点的位移及应力分别由 (4.10) 及 (4.11) 给出。但若将这些公式里的函数 $\varphi(z), \varphi'(z), \varphi''(z)$ 等看作 ζ 的函数, 那就应该改写成 Φ, Φ^I, Φ^{II} 等等, 于是公式变成如下形状:

$$u + iv = \frac{1}{2G} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} \overline{\Phi(\zeta)} - \{ \overline{Z(\zeta)} \cdot \Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta) \} \right], \quad (17.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} &= \operatorname{Re}[\Phi^I(\zeta)], \\ \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy} &= \overline{Z(\zeta)} \cdot \Phi^{II}(\zeta) + \Psi^{II}(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (17.9)$$

现在考虑 ζ 面上点 ζ 处坐标轴方向的线元素 $d\xi, d\eta$ 在 z 面上和它们相对应的线元素为 dz_ξ, dz_η , 其长度分别为 $d\xi, d\eta$ 的 J 倍, 其方向分别与 x 轴及 y 轴的夹角为 ϕ 。因此, 可这样选取坐标: 即在 z 面上分别取曲线 $\eta = \text{常数}, \xi = \text{常数}$ 的切线方向为局部坐标系 (图 17.4)。同时在此坐标系下取位移分量为 u_ξ, u_η 及应力分量为 $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ (图 17.5), 则得

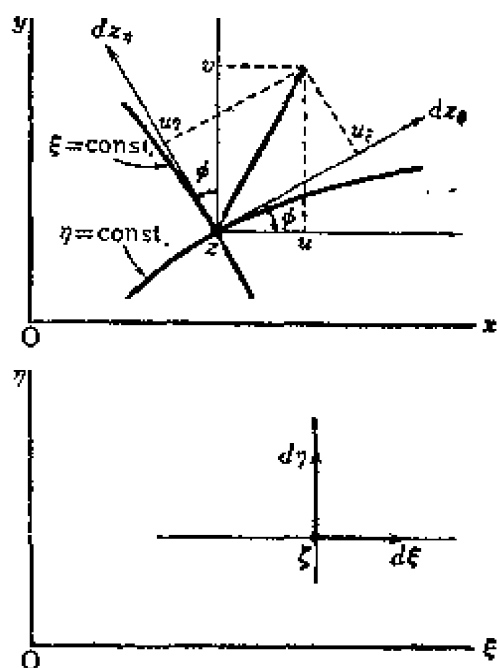


图 17.4

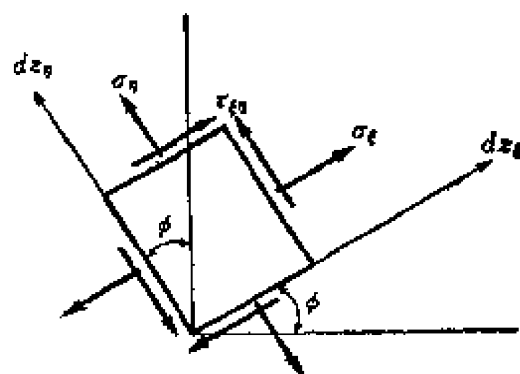


图 17.5

$$u_{\xi} - i u_{\eta} = (u - i v) e^{i\phi} = \frac{1}{2G} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} \overline{\Phi(\zeta)} - \{ \overline{Z(\zeta)} \Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta) \} \right] e^{i\phi}, \quad (17.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{4} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} &= \operatorname{Re}[\Phi^I(\zeta)], \\ -\frac{\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi}}{2} + i \tau_{\xi\eta} &= \left(-\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i \tau_{xy} \right) e^{2i\phi} \\ &= \overline{[Z(\zeta) \cdot \Phi^{II}(\zeta) + \Psi^{II}(\zeta)]} e^{2i\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

[注1] 把Airy 应力函数 F 与 (11.10) 定义的函数 H 都看作参数面上坐标 (ξ, η) 的函数, 则它们就不一定再是重调和函数了, 但有如下关系式成立:

$$F + iH = \overline{Z(\zeta)} \Phi(\zeta) + \Psi(\zeta). \quad (17.12)$$

于是可得与 (17.10) 等价的公式

$$u_{\xi} = \frac{1}{J} \left(\frac{1-\nu}{E} \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{2}{E} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right), \quad u_{\eta} = \frac{1}{J} \left(\frac{1-\nu}{E} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{2}{E} \frac{\partial H}{\partial \xi} \right), \quad (17.13)$$

同时也可推得与 (17.11) 等价的公式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{1}{J^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{\eta} &= \frac{1}{J^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \eta} \right), \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{J^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial J}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial J}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17.14)$$

这两组公式我们暂时还用不到。

[注2] Bricas 的应力、位移的表达式 (见前所引过的著作第12章), 本质上与 (17.10), (17.11) 相同。将他的记号用我们的记号解释时, 只须用如下公式即可 (左边是 Bricas 的记号):

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 4 \frac{1-2\nu}{E} \operatorname{Re}[\Phi^I], \quad h = \frac{1}{J}, \quad r^2 = Z\bar{z}, \quad f = -\frac{1+\nu}{E} \operatorname{Re}[\Psi], \\ \theta + i\theta' &= 2\Phi^I, \quad f' = -\operatorname{Re}[\Psi], \quad \Omega + iX = 2\Phi e^{-i\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

但这些式子今后也用不着。

§ 18 椭圆环

设弹性体的区域 (D) 是由两个共焦椭圆所围成的, 取焦点的

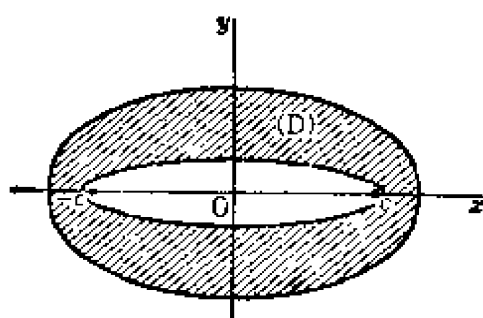


图 18.1

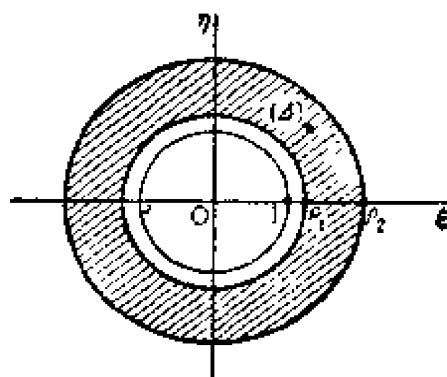


图 18.2

坐标为 $z = \pm c$ (图 18.1)。用 Joukowski 变换

$$z = Z(\zeta) = \frac{c}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (18.1)$$

映照到 ζ 面上时, 则 z 面上的区域 (D) 所对应的 ζ 面上的区域 (Δ) 是一个圆环区域 (图 18.2)

$$\rho_1 < |\zeta| < \rho_2. \quad (18.2)$$

将 (18.1) 微分, 得到

$$J e^{i\theta} = Z'(\zeta) = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right). \quad (18.3)$$

将复应力函数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 看作 ζ 的函数 $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, 它们在区域 (Δ) 内都是正则的。而围绕圆孔一周时的多值性与多值函数

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\zeta) &= L \cdot Z(\zeta) \log \zeta + M \log \zeta, \\ \Psi_0(\zeta) &= N \cdot Z(\zeta) \log \zeta + K \log \zeta \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

相同。其中 L 是实数, 其余都是复数。 $\Phi - \Phi_0$, $\Psi - \Psi_0$ 在圆环区域 (Δ) 内是单值正则的, 所以可展成 Laurent 级数。因此 $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ 的一般表达式为

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= L \cdot Z(\zeta) \log \zeta + M \log \zeta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n, \\ \Psi(\zeta) &= N \cdot Z(\zeta) \log \zeta + K \log \zeta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \zeta^n. \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

因此如果两函数 $\Phi(\zeta)$ 和 $\Psi(\zeta)$ 已知, 则对孔周围的三个位移分量

可由 (8.19) 决定。在内圆周所受的合力 (X, Y) 及合力矩可由 (8.20) 决定, 而外圆周上所受的合力及合力矩与前者大小相等、符号相反。

[注 1] 通常所说的椭圆坐标, 就是将上面的 ζ 表示为

$$\zeta = e^{\alpha + i\beta} \quad (18.6)$$

时的 (α, β) 。利用椭圆坐标, 则有

$$z = \frac{c}{2} (e^{\alpha + i\beta} + e^{-\alpha - i\beta}) = c \cosh (\alpha + i\beta), \quad (18.7)$$

即

$$x = c \cosh \alpha \cos \beta, \quad y = c \sinh \alpha \sin \beta, \quad (18.8)$$

曲线 $\alpha = \alpha_0$ (常数) 是椭圆

$$(x/c \cosh \alpha_0)^2 + (y/c \sinh \alpha_0)^2 = 1, \quad (18.9)$$

曲线 $\beta = \beta_0$ (常数) 是双曲线

$$(x/c \cos \beta_0)^2 - (y/c \sin \beta_0)^2 = 1, \quad (18.10)$$

将 (18.6) 代入 (18.5) 就得到椭圆坐标表示的应力函数的表达式。

[注 2] A. Timpe [Math. Zeits. 17 (1923), 189~205] 曾讨论过解椭圆环的应力问题的一般方法。他的应力函数可由 (18.5) 推导出来。在该处含有 L, M, N 的项相当于 Timpe 的“补充解”(Ergänzungslösungen)。他在该论文末尾曾说过: “处理无孔椭圆, 椭圆的外区域, 及共焦双曲线所围成的区域时, 除上述方法外不须要其他新的工具了”, 这种说法是不正确的。例如对于双曲线所围成的区域施用上述映照时, 所得的象是在 ζ 面上由两条射线所围成的区域, 所以 (18.5) 就不能用了。非用 $\log \zeta = \alpha + i\beta$ 平面上的第二种 Laplace 积分来表示不可。

[注 3] 在 (18.2) 中, 当 $\rho_1 = 1, \rho_2 = \infty$ 时, 则区域 (D) 是由无限平面除去一条线段所构成的。因此对具有一条线段形切口的相当大的板, 以及对具有一条焊接线段的相当大的板都可如此处理。另一方面, 对具有自由椭圆孔的弹性体的简单应力问题, 就须要利用反照原理来解决 (参照 § 24)。

§ 19 双极坐标

在一般情况下, 我们可适当的选取坐标, 将线性分式映照函数

写成如下形式(但将退化情形除外):

$$z = Z(\zeta) - ia \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}. \quad (19.1)$$

再利用在 ζ 面上极坐标的关系式

$$\zeta = e^{\alpha + i\beta} \quad (19.2)$$

导入新参数 $\alpha + i\beta$, 于是

$$z = ia \coth \frac{\alpha + i\beta}{2} = \frac{\alpha \sin \beta + ia \sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta}. \quad (19.3)$$

这个新参数 (α, β) 就是 G. B. Jeffery [Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 221 (1920)] 所用过的双极坐标.

今在 $\alpha + i\beta$ 面上考察带状区域 $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. 若命其在 z 面上的对应区域为 (D) , 则有(图 19.1)

(1) $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ 时, 区域 (D) 是有偏心圆孔的圆板;

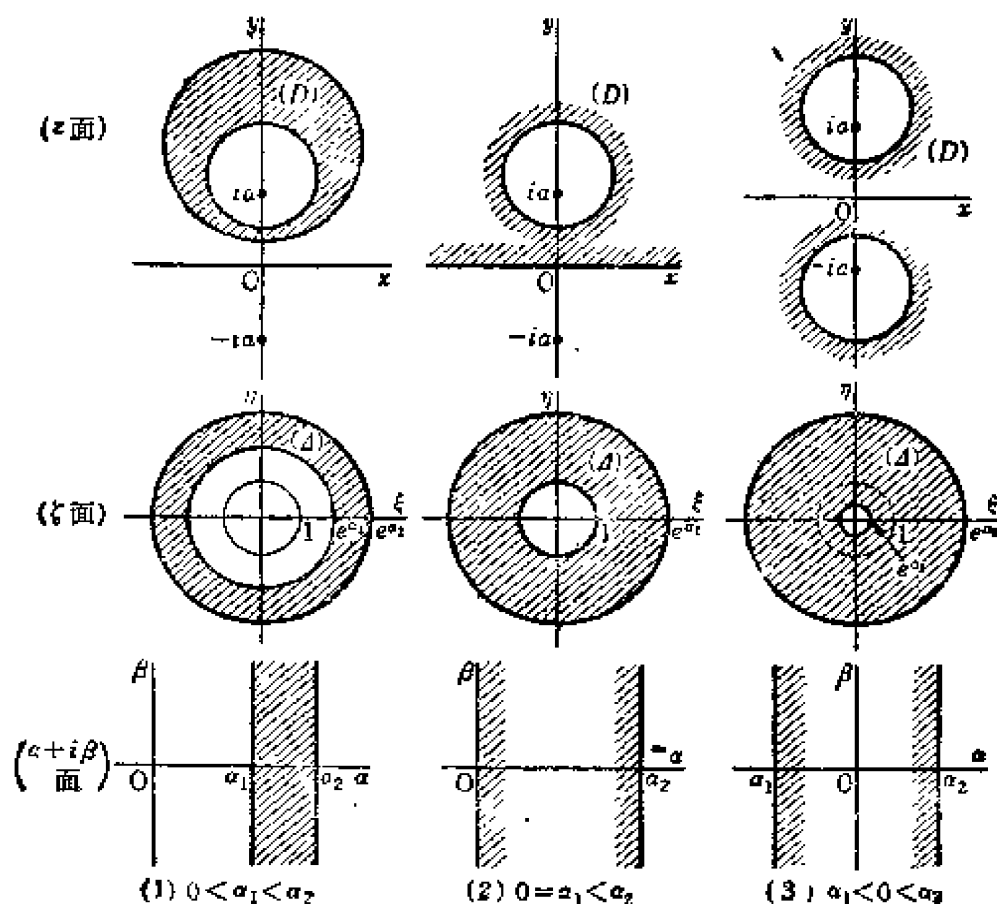


图 19.1

(2) $0 = \alpha_1 < \alpha_2$ 时, 区域(D)是有圆孔的半无限板;

(3) $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$ 时, 区域(D)是有二圆孔的无限板。

对于每种情形, 在 ζ 面上的对应区域(Δ)都是圆环:

$$e^{\alpha_1} < |\zeta| < e^{\alpha_2}.$$

这时, 与 $z = \infty$ 相对应的点 $\zeta = 1$ 仅在(3)的情况下才包含在区域(Δ)的内部。

因此, 在推导区域(D)中的正则复应力函数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 的表达式时, 有必要分别考虑(1), (2)的情形和(3)的情形。在(1), (2)的情形, 将 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 看作仅为 ζ 的函数 $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ 时, 它们在圆形域(Δ)中是正则的, 所以它们的表达式可用和前节完全同样方法求出, 有(18.5)的形式(但在此我们将用(19.1)当作 $Z(\zeta)$), 式中的系数 L, M, N, K 完全照样由(8.19), (8.20)决定。

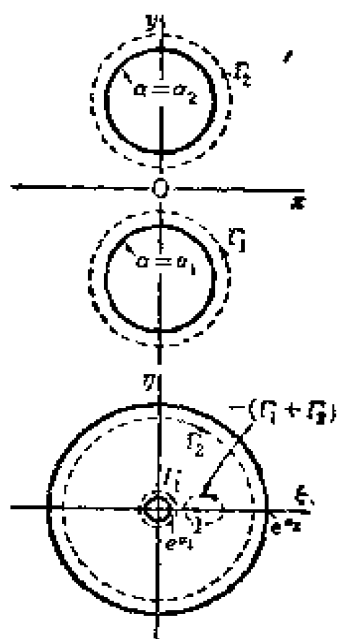


图 19.2

在(3)的情形, 区域(Δ)中含有与 $z = \infty$ 对应的点 $\zeta = 1$ (在一般情形), 所以有必要考虑其周围的多值性。今记以正方向绕着 $|\zeta| = e^{\alpha_1}$ 所对应的边界线一周 (在 Z 面上) 而成的围道为 Γ_1 , 以正方向绕着 $|\zeta| = e^{\alpha_2}$ 所对应的边界线 (在 z 面上) 一周而成的围道为 Γ_2 . 在 ζ 面上, 它们对应的都是在圆环(Δ)内围绕内孔一周的围道。不过 Γ_1 所对应的是不包含点 $\zeta = 1$ 正向绕孔一周的围道, 而 Γ_2 所对应的是包含点 $\zeta = 1$ 负向绕孔一周的围道 (图 19.2)。于是, 以正方向围绕点 $\zeta = 1$ 一周的围道对应于 z 面上同伦于 $-(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ 的围道。

设用公式(8.15)对围道 Γ_1 及 Γ_2 所确定的四个常数分别为 L_1, M_1, N_1, K_1 及 L_2, M_2, N_2, K_2 , 则 $\Phi(\zeta)$ 及 $\Psi(\zeta)$ 在区域(Δ)

中的多值性分别与函数

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\zeta) &= I_1 Z(\zeta) \log \zeta + M_1 \log \zeta - (L_1 + I_2) \\ &\quad + Z(\zeta) \log(\zeta - 1) - (M_1 + M_2) \log(\zeta - 1), \\ \Psi_0(\zeta) &= N_1 Z(\zeta) \log \zeta + K_1 \log \zeta - (N_1 + N_2) \\ &\quad + Z(\zeta) \log(\zeta - 1) - (K_1 + K_2) \log(\zeta - 1) \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

的多值性相同。于是， $\Phi(\zeta) - \Phi_0(\zeta)$ ， $\Psi(\zeta) - \Psi_0(\zeta)$ 除去点 $\zeta = 1$ 外在区域(4)内是单值正则的，但 $\zeta = 1$ 是孤立奇点，因此，它们在奇点的主部可展为如下的负幂级数：

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) - \Phi_0(\zeta) &\approx \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (\zeta - 1)^{-n}, \\ \Psi(\zeta) - \Psi_0(\zeta) &\approx \sum_{n=1}^{\infty} D_{-n} (\zeta - 1)^{-n}. \end{aligned} \right\} \quad (19.5)$$

再从函数中减去它们，所得的余式在圆环域(4)中也都是单值正则的，所以可将它们展成 ζ 的 Laurent 级数。最后，概括起来， $\Phi(\zeta)$ ， $\Psi(\zeta)$ 可表示为如下表达式：

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \Phi_0(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (\zeta - 1)^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n, \\ \Psi(\zeta) &= \Psi_0(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} D_{-n} (\zeta - 1)^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \zeta^n. \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

若假设离开载荷较远处的应力为零，则有关 $(\zeta - 1)$ 的负幂项就不存在。若对于 I_1 和 I_2 的位错及合力为零，则 $\Phi_0(\zeta)$ ， $\Psi_0(\zeta)$ 中所含的系数 L_1 ， L_2 ， M_1 ， M_2 ， N_1 ， N_2 都等于零，而仅余下含 K_1 ， K_2 的项。若再设 I_1 及 I_2 的合力矩为零，则 K'_1 ， K'_2 也都等于零。最后只剩下 K_1 ， K_2 。

[注 1] 由上面导出的复应力函数表达式，可求出 Airy 应力函数，再将 $\zeta = e^{\alpha + i\theta}$ 代入，加以整理就得到 Jeffery 所得到的表达式。在他的论文中有些部分的来龙去脉确实不够清楚。但若按照本节的处理，就显得比较清楚。

在处理这类问题时，如果仅考虑边界上的应力而不注意孔的周围存在着位错情况，则所求得解，往往会发生错误〔参照小野鑑正，东大一工紀

要, 23 (1943) 中的注意]。利用本节所求出的表达式求解, 就不会发生这种现象, 因为这里必须考虑所有边界条件才能决定表达式的所有系数。利用双极坐标解弹性问题, 赖户口在这方面作了一些工作[日本机械学会论文集, 13 (1947), 17 及其他]。

[注 2] 双极坐标应用的另一种类型, 即具有圆弧切欠的半无限板的拉伸的例子[石桥正, 九大工纪要, 9 (1940), 131]。在该处若引用我们的记号, $0 < \beta < \beta_1 (< \pi)$ 这样的带状域 (4) 对应于物理面的区域 (D), 其一般解不取级数形式, 可用 Laplace 积分表示出来 (参照 § 16)。

§ 20 楔形域

对于如图 20.1 所示的楔形弹性体的区域 (D) 利用关系式

$$z = e^{\zeta}, \quad (20.1)$$

则将区域 (D) 映照到 ζ 面上的带状区域 (4): $|\eta| < \eta_1 (< \pi)$ 。此时

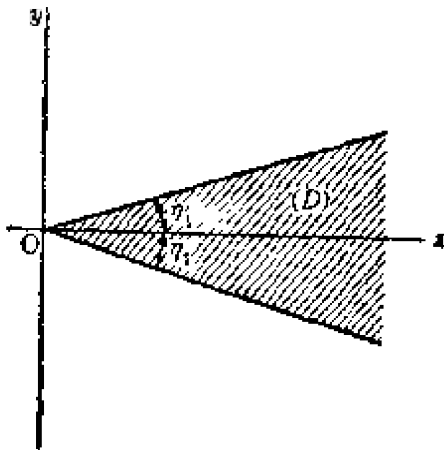


图 20.1

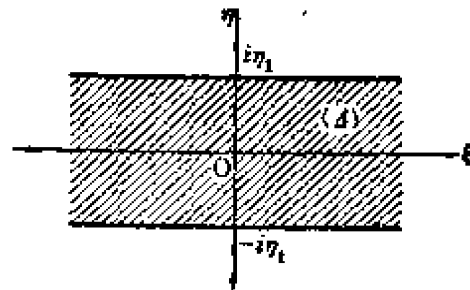


图 20.2

和 § 16 的情形不同, 是向左右延长的带状区域 (图 20.2)。所以必须用 Fourier 积分

$$\Phi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\zeta} A(\omega) d\omega, \text{ 等等} \quad (20.2)$$

代替 Laplace 积分。而且为了便于配合边界条件, 可以设

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= e^{\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\zeta} A(\omega) d\omega, \\ \Psi^1(\zeta) &= e^{\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\zeta} B(\omega) d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (20.3)$$

[注 1] W. M. Shepherd [Proc. Roy. Soc. London, **A148**(1935), 284] 的解法和用 (20.3) 的解法相同。

[注 2] Timoshenko [Theory of Elasticity (1934), 121] 将相当于我們在 § 13 对于圆环导出的表达式应用到楔形域的情形。但这决不能說我們的結果是具有“一般性”的,而似乎还应该有比 (20.3) 实用上更广泛更重要的表达式,但这方面的討論还未曾見到。

第5章 反照原理

§ 21 用反照原理作解析开拓①

关于复函数的解析开拓，除了利用 Taylor 级数方法来进行外，还有以反照原理为基础的方法。在这种方法中，经常要用到 Schwarz 的定理。

定理 1 设函数 $f(z)$ 在区域 (D) 内正则，假如 (D) 的边界的一部分是实轴上的一直线段 L ，在 $(D) + L$

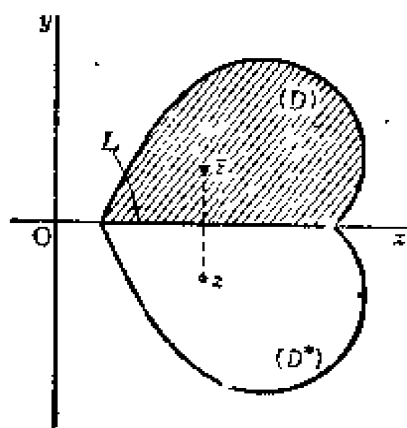


图 21.1

上 $f(z)$ 是连续的，并且在 L 上取实数值。设 (D^*) 是区域 (D) 关于实轴的反照映象，因而它们关于实轴是对称的，则函数 $f(z)$ 可以越过 L 解析开拓到 (D^*) 中，即得到在 $(D) + (D^*) + L$ 中解析的函数，而且当 $z \in (D^*)$ 时，解析开拓函数为 $\bar{f}(\bar{z})$ 。

说明 由于函数元素 $\bar{f}(\bar{z})$ 是在函数元素 $f(z)$ 中先把 z 换成 \bar{z} ，而后对其全体取共轭数而得的结果，因此它可以这样作，即在 $f(z)$ 中仍取变数为 z ，而将其系数换成对应的共轭数即可。对于在区域 (D) 内以 C 为中心的函数元素 $f(z)$ ，通过上述手续所得到的共轭的函数元素将为以 \bar{C} 为中心并具有相同收敛半径的元素。把这样定义的解析函数记作 $\bar{f}(z)$ 。于是，定理 1 的内容就是说， $f(z)$ 越过 L 到区域 (D^*) 中的解析开拓与 $\bar{f}(z)$ 一致。形式上来说，在 L 上由于 $z = \bar{z}$ ， $f(z) = \bar{f}(z)$ ，因此在 (D^*) 内可以导出 $f(z) = \bar{f}(z)$ ，利用 Painlevé 定理容易证明这一事实。

此定理又可推广如下[森口，数学，2(1950)，267]：

① 本节在叙述上已作过修改，与原书略有出入。——校者注

定理 2 設函数 $f(z)$, $g(z)$ 在区域 (D) 內是正則的, 假如 (D) 的边界的一部分是实軸上的一直綫段 L , 設 (D^*) 和 (D) 关于实軸是对称的, 在 $(D) + L$ 上 $f(z)$, $g(z)$ 是連續的, 并且在 L 上滿足 $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$, 則函数 $f(z)$, $g(z)$ 可以越过 L 解析开拓到 (D^*) 中。于是当 $z \in (D^*)$ 时, 即有

$$f(z) = \overline{g(\bar{z})}, \quad g(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

事实上, 由于在 L 上有 $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$, $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $\bar{z} = z$ 成立, 所以推出在区域 (D^*) 內也有关系 $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$, $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 成立。其証明完全和定理 1 相同。

我們知道, 定理 1 可以推广到不是直綫段而是圓弧的情形; 与此同样, 定理 2 也可推广, 即

定理 3 設区域 (D) 的一部分边界是单位圓周的一段圓弧 L , 并且 (D) 落在 L 的一側(图 21.2)。再設函数 $f(z)$, $g(z)$ 在 (D) 內正則, 在 L 上連續且滿足关系 $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$ 。若以 (D^*) 表示区域 (D) 关于单位圓周的反照映象, 則 $f(z)$, $g(z)$ 可以越过 L 解析开拓到 (D^*) 中。又若設 $z \in (D^*)$, z 的反照点为 $1/\bar{z}$, 則函数开拓后的值, 可由下式导出:

$$f(z) = \overline{g(1/\bar{z})}, \quad g(z) = \overline{f(1/\bar{z})}.$$

在此情形, 可由在 L 上的关系 $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$, $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $\bar{z} = 1/z$, 推出在 (D^*) 內成立的关系 $f(z) = \overline{g(1/\bar{z})}$, $g(z) = \overline{f(1/\bar{z})}$ 。

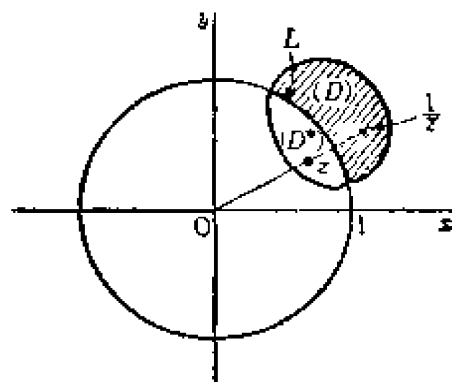


图 21.2

§ 22 对于实軸的反照

設彈性体的区域 (D) 落在实軸的一側, 并以实軸上的一直綫段 L 为部分边界(图 21.1)。下面将分別以綫段 L 为自由边界、固定边界和滑动边界三种情形来討論复应力函数越过 L 的解析开拓。

1. 自由边界情形 这时复应力函数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 在区域 (D) 内正则, 在綫段 L 上連續。当将基准点 A (§7) 取在 L 上, 則由 (4.14) 可知自由边界的条件为

$$\text{在 } L \text{ 上, } \quad \overline{\varphi(z)} + \{z\varphi'(z) + \psi'(z)\} = 0, \quad (22.1)$$

在此再引入一个輔助函数 $\chi(z)$

$$\chi(z) = z\varphi'(z) + \psi'(z), \quad (22.2)$$

則 $\chi(z)$ 在 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 的正則点也是正則的。反之, 在 $\varphi(z)$, $\chi(z)$ 的正則点 $\psi(z)$ 也是正則的。利用这个事实, 并考虑到

$$\text{在 } L \text{ 上, } \quad \bar{z} = z, \quad (22.3)$$

則得

$$\text{在 } L \text{ 上, } \quad \overline{\varphi(z)} = -\chi(z), \quad (22.4)$$

假設区域 (D^*) 和 (D) 关于实軸对称, 因此由定理 2 即得到当 $z \in (D^*)$ 时, 有解析开拓

$$\varphi(z) = -\bar{\chi}(z), \quad \chi(z) = -\bar{\varphi}(z). \quad (22.5)$$

2. 固定边界情形 由 (4.13) 知其条件为

$$\text{在 } L \text{ 上, } \quad \frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{\varphi}(z) - \{z\varphi'(z) + \psi'(z)\} = 0, \quad (22.6)$$

由此与上面同理, 可推出解析开拓的定义式:

$$\varphi(z) = \frac{1+\nu}{3-\nu} \bar{\chi}(z), \quad \chi(z) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{\varphi}(z). \quad (22.7)$$

3. 滑动边界情形 就是在垂直于 L 的方向沒有位移, 切綫方向沒有外力, 而允許沿 x 方向的位移任意移动。用記号表示, 便是

$$\text{在 } L \text{ 上, } \quad v = 0, \quad P_x = 0.$$

由 (4.13), (4.14), 其条件可写为

$$\begin{aligned} \text{在 } L \text{ 上, } \quad & \frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{\varphi}(z) - \{z\varphi'(z) + \psi'(z)\} \\ & = \frac{3-\nu}{1+\nu} \varphi(z) - \{z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}'(z)\}. \end{aligned} \quad (22.8)$$

在 L 上,

$$\bar{\varphi}(\bar{z}) + \{z\varphi'(z) + \psi'(z)\} = \varphi(z) + \{z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z})\}. \quad (22.9)$$

由此即得到

$$\text{在 } L \text{ 上, } \quad \varphi(z) = \bar{\varphi}(z), \quad \chi(z) = \bar{\chi}(z).$$

因此再利用定理 1 可导出解析开拓

$$\varphi(z) = \bar{\varphi}(z), \quad \chi(z) = \bar{\chi}(z). \quad (22.10)$$

例 在半无限板内的一点作用着集中力(图 22.1)。

设在占有半平面 $y > 0$ 的半无限板内的一点 $(z = ib)$ 作用着集中力 (X, Y) , 且直线边界 $y = 0$ 是自由的。

复应力函数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 在 $z = ib$ 具有孤立奇点。为了求该点的主部, 施行坐标变换 $z_1 = z - ib$ (图 22.1), 对于新坐标系的复应力函数记为 $\varphi_1(z_1)$, $\psi_1(z_1)$, 它们在 $z_1 = 0$ 有孤立奇点, 其主部为 (§ 14)

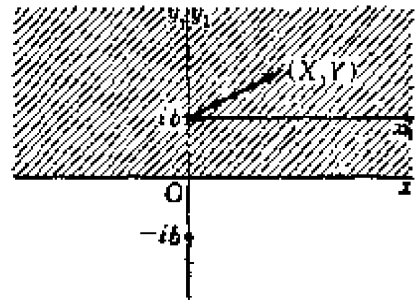


图 22.1

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z_1) &\approx -\frac{1+\nu}{8\pi}(X+iY)\log z_1, \\ \psi_1(z_1) &\approx -\frac{3-\nu}{8\pi}(X-iY)z_1\log z_1. \end{aligned} \right\} \quad (22.11)$$

由此可得 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 在 $z = ib$ 的主部如下 (§ 9, (1)):

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &\approx M \log(z - ib), \quad M = -\frac{1+\nu}{8\pi}(X+iY), \\ \psi(z) &\approx N(z - ib)\log(z - ib) + Mib \log(z - ib), \\ N &= \frac{3-\nu}{8\pi}(X-iY). \end{aligned} \right\} \quad (22.12)$$

于是用 (22.2) 定义的函数 $\chi(z)$ 也在 $z = ib$ 有奇点, 其主部为

$$\chi(z) \approx N \log(z - ib) + M \cdot 2ib / (z - ib). \quad (22.13)$$

由于在实轴是自由边界, 所以越过实轴的解析开拓可由 (22.5) 表示之。而奇点 $z = ib$ 的映象点 $z = -ib$ 是开拓区域中的奇点。在该点的主部是将 (22.12), (22.13) 用于 (22.5) 而求得为

$$\varphi(z) = -\bar{\chi}(z) \approx -\bar{N} \log(z + ib) - \bar{M}(-2ib)/(z + ib), \quad (22.14)$$

$$\chi(z) = -\bar{\varphi}(z) \approx -\bar{M} \log(z + ib). \quad (22.15)$$

在此考虑如下函数:

$$\varphi_0(z) = \varphi(z) - \{M \log(z - ib) - \bar{N} \log(z + ib) - \bar{M}(-2ib)/(z + ib)\}, \quad (22.16)$$

$$\chi_0(z) = \chi(z) - \{N \log(z - ib) + M \cdot 2ib/(z - ib) - \bar{M} \log(z + ib)\}, \quad (22.17)$$

它們对于有限的 z 是正則的(在 $z = ib$ 及 $z = -ib$ 的奇性消失), 亦即它們是整函数。 $z = \infty$ 可能是它們的奇点。但由于假設离开受力較远处应力为零, 則在 $z = \infty$ 也不得有奇点。从而它們非为常数不可。这个常数可取为零 (§ 9)。于是应力状态由

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= M \log(z - ib) - \bar{N} \log(z + ib) + \bar{M} \cdot 2ib/(z + ib), \\ \chi(z) &= N \log(z - ib) + M \cdot 2ib/(z - ib) - \bar{M} \log(z + ib) \end{aligned} \right\} \quad (22.18)$$

可以計算出来。

[注] Melan [ZAMM, 12 (1932), 343] 的解法和此处的解法很类似, 但沒有解决到底。

§ 23 对于圓弧的反照

設以原点为中心的圓周 $|z| = a$ 的全体或其中一段弧 L 为彈性体的边界, 在其上有

$$\bar{z}z = a^2, \quad \therefore \bar{z} = a^2/z, \quad (23.1)$$

因此, 在这里取輔助函数为

$$\chi(z) = \frac{a^2}{z} \varphi'(z) + \psi'(z) \text{ ①}. \quad (23.2)$$

与前节同理, 可分別得到如下情况的解析开拓:

图 23.1

(1) 当 L 为自由边界时, 有

$$\varphi(z) = -\bar{\chi}(a^2/z), \quad \chi(z) = -\bar{\varphi}(a^2/z). \quad (23.3)$$

(2) 当 L 为固定边界时, 有

$$\varphi(z) = \frac{1+\nu}{3-\nu} \bar{\chi}(a^2/z), \quad \chi(z) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{\varphi}(a^2/z). \quad (23.4)$$

① 在单連区域中函数 $\chi(z)$ 就不是解析的。——校者注

例 1 对具有自由圆孔的无限板, 在离开孔较远处受有均匀应力的情形 (§ 14, 例 2)。

由题设知 $\varphi(z)$, $\psi'(z)$ 在 $z = \infty$ 处有一阶的极点, 其主部为

$$\varphi(z) \approx Az, \quad \psi'(z) \approx 2Bz. \quad (23.5)$$

其中 (§ 6, 例 1)

$$A = \left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} \right]_{z=\infty}, \quad 2B = \left[\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy} \right]_{z=\infty}. \quad (23.6)$$

因此函数 $\chi(z)$ 根据 (23.2) 在 $z = \infty$ 的主部为

$$\chi(z) \approx 2Bz. \quad (23.7)$$

于是在区域 $a < |z| < \infty$ 内 $\varphi(z)$ 及 $\chi(z)$ 无奇点。借此由 (23.3) 可越过圆周解析开拓到区域 $0 < |z| < a$ 。因此 $z = 0$ 为解析开拓的奇点, 在该点的主部可由在 $z = \infty$ 的主部用 (23.3) 导出如下:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\bar{\chi}(a^2/z) \approx -2\bar{B}(a^2/z), \\ \chi(z) &= -\bar{\varphi}(a^2/z) \approx -\bar{A}(a^2/z). \end{aligned} \right\} \quad (23.8)$$

在此, 将在 $z = \infty$ 的主部 (23.5), (23.7) 与在 $z = 0$ 的主部两两相加, 与前节同理, 即得

$$\varphi(z) = Az - 2\bar{B}a^2/z, \quad \chi(z) = 2Bz - \bar{A}a^2/z. \quad (23.9)$$

因此, 应力状态及位移都可由此直接计算出来。

[注 1] 为了作比较, 由 (23.9) 求出 Airy 应力函数 $F(x, y)$:

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Re} \left[\bar{z} \left(Az - 2\bar{B} \frac{a^2}{z} \right) + \left(Bz^2 - 2Aa^2 \log z + \bar{B} \frac{a^4}{z^2} \right) \right] \\ &= A(r^2 - 2a^2 \log r) + B \left(r^2 + 2a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ &\quad - B' \left(r^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (23.10)$$

(但设 $z = re^{i\theta}$), 这与用其他方法求的解完全一致。

例 2 在具有自由圆孔的无限板内一点作用着集中力的情形。

设圆孔为 $|z| = a$, 在点 b ($b > a$) 作用着集中力 (X, Y) 。复应力函数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 在 $z = b$ 有奇点, 和前节的例同理得其主部为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &\approx M \log(z-b), \\ \psi(z) &\approx N(z-b) \log(z-b) - Mb \log(z-b), \end{aligned} \right\} \quad (23.11)$$

其中 M, N 和 (22.12) 具有同样意义。对于 (23.2) 的函数 $\chi(z)$ 在 $z = b$ 的主

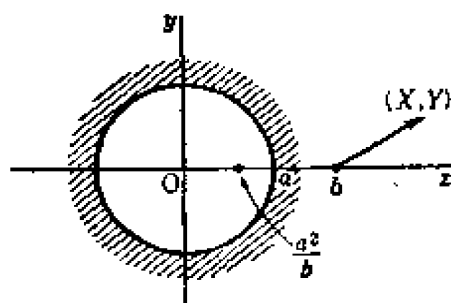


图 23.2

部由(23.11)可知为

$$\chi(z) \approx N \log(z-b) - M \frac{b-a^2/b}{z-b}. \quad (23.12)$$

越过圆周到圆内解析开拓时, 在 $z=a^2/b$ 出现奇点, 在该点的主部由(23.11), (23.12) 用(23.3)可导出如下:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &\approx -\bar{N} \log\left(z - \frac{a^2}{b}\right) - \bar{M}\left(b - \frac{a^2}{b}\right) \frac{a^2}{b^2} \Big/ \left(z - \frac{a^2}{b}\right), \\ \chi(z) &\approx -\bar{M} \log\left(z - \frac{a^2}{b}\right). \end{aligned} \right\} \quad (23.13)$$

其次, 假设在离开作用点较远处的应力等于零, 而合力必须与 (X, Y) 平衡, 所以在 $z=\infty$ 的主部是

$$\varphi(z) \approx M \log z, \quad \psi(z) \approx Nz \log z, \quad \therefore \chi(z) \approx N \log z. \quad (23.14)$$

于是在其映象点 $z=0$ 的主部是

$$\varphi(z) \approx \bar{N} \log z, \quad \chi(z) \approx \bar{M} \log z. \quad (23.15)$$

除上述以外, $\varphi(z), \chi(z)$ 不能再有奇点。因此与前面例题同样推理, 可得到

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= M \log(z-b) - \bar{N} \log\left(z - \frac{a^2}{b}\right) \\ &\quad - \bar{M}\left(b - \frac{a^2}{b}\right) \frac{a^2}{b^2} \Big/ \left(z - \frac{a^2}{b}\right) + \bar{N} \log z, \\ \chi(z) &= N \log(z-b) - M\left(b - \frac{a^2}{b}\right) \Big/ \left(z - \frac{a^2}{b}\right) \\ &\quad - \bar{M} \log\left(z - \frac{a^2}{b}\right) + \bar{M} \log z. \end{aligned} \right\} \quad (23.16)$$

由此可计算应力分布及位移。

§ 24 椭圆孔的情形

物理面上的椭圆

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad (a > b) \quad (24.1)$$

由映照函数

$$z = Z(\zeta) = \frac{c}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (24.2)$$

映照到 ζ 面上的圆: $|\zeta| = R$ ($R > 1$)。在此, 椭圆的长半径 a , 短半径 b 与参数 c 及 R 间有如下关系式:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{c}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right), & b &= \frac{c}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right), \\ c &= \sqrt{a^2 - b^2}, & R &= \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}. \end{aligned} \right\} \quad (24.3)$$

用这个映照函数, 可将椭圆 (24.1) 的外部区域 (D) 一对一地映照到 ζ 面的区域 (Δ): $|\zeta| > R$.

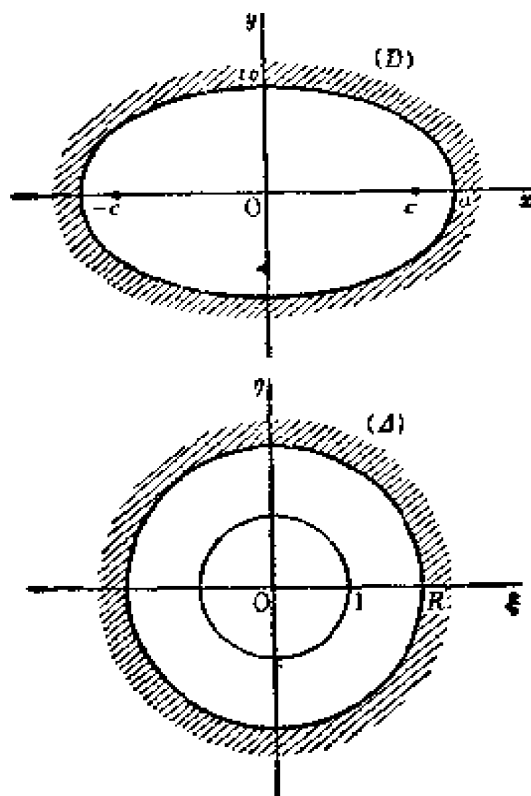


图 24.1

由 § 17 知

$$u - iv = \frac{1}{2G} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{\Phi}(\zeta) - \{ \bar{Z}(\zeta) \cdot \Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta) \} \right], \quad (24.4)$$

$$-P_y - iP_x = \bar{\Phi}(\zeta) + \{ \bar{Z}(\zeta) \cdot \Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta) \}. \quad (24.5)$$

特别当边界 L 是圆 ① 的弧时, 在其上成立着

$$\bar{\zeta} = R^2 / \zeta. \quad (24.6)$$

因此辅助函数 $X(\zeta)$ 为

$$X(\zeta) = \bar{Z}(R^2/\zeta) \cdot \Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta) \quad (24.7)$$

① 此处原书为: “椭圆 (24.1)”, 有誤。——校者注

則越过 L 的解析开拓可得如下:

(1) L 为自由边界时

$$\Phi(\zeta) = -\bar{X}(R^2/\zeta), \quad X(\zeta) = -\bar{\Phi}(R^2/\zeta). \quad (24.8)$$

(2) L 为固定边界时

$$\Phi(\zeta) = \frac{1+\nu}{3-\nu} \bar{X}(R^2/\zeta), \quad X(\zeta) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{\Phi}(R^2/\zeta). \quad (24.9)$$

例 具有自由椭圆孔的无限板在较远处受有均匀应力的情形。

由较远处的条件, 和前节例 1 同理得

$$\text{在 } z = \infty, \quad \varphi(z) \approx Az, \quad \psi(z) \approx Bz^2, \quad (24.10)$$

其中 A, B 是和 (23.6) 相同的。

物理面上 $z = \infty$ 和 ζ 面上 $\zeta = \infty$ 相对应, 所以在 ζ 面上有

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } \zeta = \infty, \quad \Phi(\zeta) &\approx A \cdot Z(\zeta) \approx A \frac{c}{2} \zeta, \quad \Phi^I(\zeta) \approx A, \\ \Psi^I(\zeta) &\approx 2B \cdot Z(\zeta) \approx Bc\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (24.11)$$

于是由 (24.7) 得

在 $\zeta = \infty$,

$$X(\zeta) \approx \frac{c}{2} \left(\frac{R^2}{\zeta} + \frac{\zeta}{R^2} \right) \Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta) \approx A \frac{c}{2R^2} \zeta + Bc\zeta. \quad (24.12)$$

$\Phi(\zeta)$ 及 $X(\zeta)$ 在区域 $|\zeta| > R$ 内除上述以外不能再有奇点。所以越过圆的周界解析开拓时, 仅有 $\zeta = 0$ 作为奇点出现。在该点的主部是

$$\Phi(\zeta) \approx - \left(A \frac{c}{2R^2} + Bc \right) \frac{R^2}{\zeta}, \quad X(\zeta) \approx - A \frac{c}{2} \frac{R^2}{\zeta}. \quad (24.13)$$

这样, 就得到全 ζ 面上存在的仅有二个奇点的主部, 将它们合并起来就得到

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= A \frac{c}{2} \zeta - \left(A \frac{c}{2R^2} + Bc \right) \frac{R^2}{\zeta}, \\ X(\zeta) &= \left(A \frac{c}{2R^2} - Bc \right) \zeta - A \frac{c}{2} \frac{R^2}{\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (24.14)$$

由此可算出应力及位移。

[注 1] 这个问题虽可按 § 18 的方式求解, 但此处的解法却简单得多。

[注 2] 在固定边界的情形, 用 (24.9) 代替 (24.8) 也可同样解出。N. Muschelishvili [ZAMM. 13 (1933), 264] 用另外一种方法将它解出, 但用反照原理的方法却简单得多。